गणित

Study Material for JEE Main & Advanced preparation

Prepared by Career Point Kota Experts

CAREER POINT

CONTENTS OF THE PACKAGE AT A GLANCE

MATHEMATICS

Class 11

त्रिकोणमिति

- त्रिकोणमितीय अनुपात
- त्रिकोणमितीय समीकरण
- त्रिभुज के गुणधर्म
- त्रिभुज से संबंधित वृत्त की त्रिज्याऐं

बीजगणित (Part-I)

- प्राथमिक गणित एवं लघुगणक
- द्विघात समीकरण
- श्रेढ़ियाँ
- द्विपद प्रमेय
- क्रमचय एवं संचय
- सांख्यिकी
- समुच्चय एवं सम्बन्ध

निर्देशांक ज्यामिति

- बिन्दु एवं सरल रेखा
- वृत्त
- परवलय
- दीर्घवृत्त
- अतिपरवलय

Class 12

अवकलन

- फलन
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन
- सीमा
- सान्तत्यता
- अवकलन
- स्पर्शरेखा एवं अभिलम्ब
- एकदिष्टता
- उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ

समाकलन

- अनिश्चित समाकलन
- निश्चित समाकलन
- वक्रों का क्षेत्रफल
- अवकल समीकरण

बीजगणित (Part-II)

- सम्मिश्र संख्या
- प्रायिकता
- सारणिक
- मैट्रिक्स
- सदिश
- त्रिविम निर्देशांक ज्यामिति

फलन

This chapter covers the following syllabus

- फलनों के प्रान्त एवं परिसर
- अन्तर्क्षेपी, आच्छादक तथा एकैकी फलन
- दो फलनों का योग, अन्तर, गुणनफल एवं भागफल
- संयुक्त फलन
- निरपेक्ष मान
- महत्तम पूर्णांक, बहुपद, परिमेय, त्रिकोणमितीय, चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलन,
- सम एवं विषम फलन
- फलनों का प्रतिलोम

Revision Plan

Prepare Your Revision plan today!

Exercise Sheet को हल करने के बाद, नीचे दिये गये निर्देशों के अनुसार कृपया निम्न सारणी भरें।

A. नीचे दिये गये स्तम्भ A में उन प्रश्नों की संख्या (QN) को लिखिये जिन्हें आप स्वयं हल करने में असमर्थ रहें।

B. स्तम्भ **A** में लिखे गये प्रश्नों को फेकल्टी से पूछने के पश्चात् इन प्रश्नों के हिन्ट व हल अच्छी तरह लिखकर ऐसे रखें कि रिवीजन के समय उन प्रश्नों की संख्या को आसानी से देखा जा सकें।

C. स्तम्भ **B** में उन प्रश्नों की संख्या को लिखें जिन्हें आप महत्वपूर्ण प्रश्न या अच्छे प्रश्न मानते है।

EXERCISE	COLUMN A	COLUMN B
	Questions unable to solve in first attempt	Good or Important questions
Level-1		
Level-2		
Level-3		
Level-4		
Level-5		
Level-6		

Revision Strategy :

जब कभी आप इस अध्याय का रिवीजन करना चाहों, तो निम्न स्टेप का अनुसरण करें -

Step-1: थ्योरी नोट्स का रिवीजन करें।

Step-2: स्तम्भ A के प्रश्नों को हल करें।

Step-3: स्तम्भ B के प्रश्नों को हल करें।

Step-4: Other Question Bank, Problem book के प्रश्न हल करें।

1. प्रारंभिक अध्ययन ::

1.1 ट्रायकोटोमी नियम :

वास्तविक संख्याऐं मापांक में क्रम संबंधित होती हैं। यदि x तथा y दो वास्तविक संख्याऐं हों, तो उनके मध्य एक और केवल एक सम्बन्ध निम्न प्रकार का होगा $x < y,\ x = y,\ x > y$

1.2 अन्तराल :

किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं के मध्य की संख्याओं के समुच्चय को **''अन्तराल''** कहते हैं। अन्तराल के प्रकार निम्नलिखित हैं।

(a) संवृत्त या बन्द अन्तराल :

$[a, b] = \{x, a \leq x \leq b\}$

(b) विवृत्त या खुला अन्तराल :

(a, b) या $]a, b[= \{x, a < x < b\}$

(c) अर्ध विवृत्त या अर्ध संवृत्त अन्तराल :

$[a, b[$ या $[a, b) = \{x ; a \leq x < b\}$

$]a, b]$ या $(a, b] = \{x ; a < x \leq b\}$

2. फलन की परिभाषा ::

माना A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं, तो फलन ' f ' जो समुच्चय A से समुच्चय B में एक नियम कि समुच्चय A के अवयवों व समुच्चय B के अवयवों से इस प्रकार सम्बद्ध है कि

(i) समुच्चय A के सभी अवयव,समुच्चय B के किसी अवयव से सम्बद्ध हों

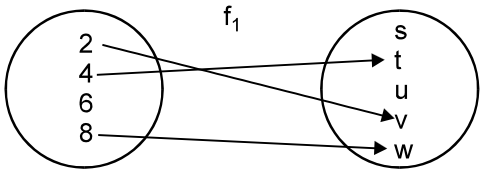
(ii) समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध है।

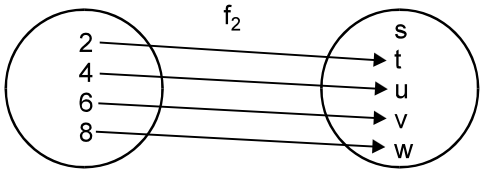
पद "प्रतिचित्रण" ("mapping"), "संगतता" (correspondence), प्रतिबिम्ब आदि "फलन" के पर्यायवाची हैं।

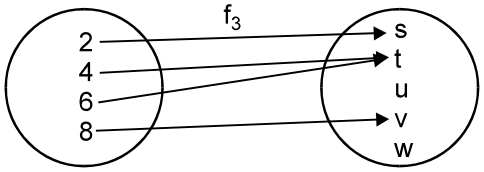
यदि समुच्चय A से समुच्चय B में फलन f हो तो हम इसे $f : A \to B$ या $A \xrightarrow{f} B$, से प्रदर्शित करते हैं, जो कि A से B में फलन पढ़ा जाता है या A से B में प्रतिचित्रण कहलाता है।

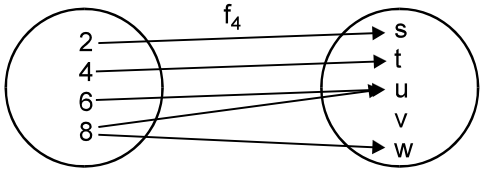
2.1 पूर्व प्रतिबिम्ब / f प्रतिबिम्ब : माना कि A एवं B दो समुच्चय हैं एवं यदि कोई अवयव $a \in A$, किसी अवयव $b \in B$ से सम्बद्ध हो, तो b , a का f-प्रतिबिम्ब या f' का प्रतिचित्रण या फलन f'का a' पर मान कहलाता है एवं a ,b का पूर्व प्रतिबिम्ब कहलाता है। जिसे हम $b = f(a)$ से दर्शाते हैं।

उदा.1 माना कि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ तथा $B = \{s, t, u, v, w\}$ दो समुच्चय हैं एवं A के अवयवों का B के अवयवों से सम्बद्ध नियम f_1, f_2, f_3 एवं f_4 चित्रानुसार है









उपरोक्त से स्पष्ट है कि f_1 समुच्चय A से समुच्चय B में फलन नहीं है क्योंकि एक अवयव $6 \in A$ जो कि B के किसी भी अवयव से सम्बद्ध नहीं है। परन्तु f_2 व f_3 समुच्चय A से B में फलन हैं, क्योंकि f_2 व f_3 में Aका प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध है, परन्तु f_4 समुच्चय A से B में फलन नहीं हैं, क्योंकि अवयव $8 \in A$ समुच्चय B के दो अवयवय u एवं w से सम्बद्ध है।

3. फलन को निरूपित करने के तरीके ::

3.1 विश्लेषणात्मक निरूपण :

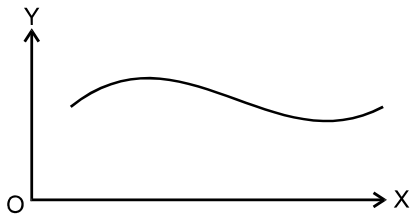
$$y = \sqrt{x^2 - 1},\ f(x) = \frac{\log_e x + e^x}{\sin x}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{e^{2x} \sin^{-1} x},\ \ldots\ldots\ldots$$

फलन को व्यक्त करने के उपरोक्त तरीके विश्लेषणात्मक निरूपण कहलाते हैं अर्थात् जब फलन $y = f(x)$ या $f(x, y) = 0$ से व्यक्त किया जाता है तो यह निरूपण **विश्लेषणात्मक निरूपण (Analytical Representation)** कहलाता है।

3.2 लेखाचित्र निरूपण :

द्विविमीय निर्देशांक में बिन्दुओं M(x, y) का समुच्चय दो या दो से अधिक बिन्दुओं को जो एक ही सरल रेखा, जो y -अक्ष के समान्तर है, पर स्थित नहीं है, को प्रकट करता है। तब M(x, y) एक फलन को प्रदर्शित करता है, जहाँ x' कोणांक एवं y फलन के मान को प्रदर्शित करता है।



3.3 प्रतिचित्रण (Mapping) : एक प्रतिचित्रण $f : X \to Y$ फलन कहलाता है, यदि समुच्चय X के प्रत्येक अवयव का प्रतिबिम्ब समुच्चय Y में हो। यह तब ही संभव हो सकता है जबकि समुच्चय Y समान प्रकार के अवयव रखता है जिनका समुच्चय X में कोई प्रतिबिम्ब न हो समुच्चय X में प्रत्येक अवयव की एक से अधिक प्रतिबिम्ब नहीं हो सकता परन्तु यह संभव है कि समुच्चय X का एक से अधिक अवयव का समान प्रतिबिम्ब हो सकता है।

प्रान्त, सह प्रान्त : समुच्चय X फलन f का प्रान्त कहलाता है अर्थात् उन अवयवों का समुच्चय जिनमें फलन परिभाषित है एवं समुच्चय Y फलन f का सहप्रान्त कहलाता है अर्थात् उन अवयवों का समुच्चय जिनमें फलन परिभाषित किया गया हो।

फलन f का परिसर : समुच्चय X में प्रत्येक अवयव के प्रतिबिम्ब का समुच्चय फलन का परिसर कहलाता है।

नोट :

परिसर $\subseteq$ सहप्रान्त

3.4 फलन क्रमित युग्म के रूप में : माना A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं तो Aसे B, में सम्बन्ध अर्थात् A × B का उपसमुच्चय A से B में फलन प्रतिचित्रण (or a mapping or a map) कहलाता है यदि

(i) प्रत्येक $a \in A$ के लिऐ $b \in B$ इस प्रकार विद्यमान है कि $(a, b) \in f$,

(ii) $(a, b) \in f$ तथा $(a, c) \in f \Rightarrow b = c$.

इस प्रकार A × B का अरिक्त उपसमुच्चय A से B में एक फलन है, यदि A का प्रत्येक अवयव f में कुछ क्रमित युग्म में प्रकट होता हो एवं f में कोई दो क्रमितयुग्म प्रथम अवयव समान नहीं रखते हों।

यदि $(a, b) \in f$, तो f के अन्तर्गत b, a का प्रतिबिम्ब कहलाता है।

उदा.2 माना कि A = {a, b, c}, B = {2, 3, 4} तथा f_1 , f_2 एवं f_3 ..... समुच्चय A × B के उपसमुच्चय हों, तो

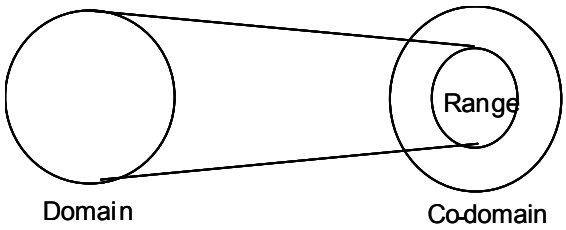
f_1 = {(a, 2), (b, 3), (c, 4)}
f_2 = {(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4)},
f_3 = {(a, 3), (a, 4)}
f_4 = {(a, 2), (c, 3), (b, 4)}
.....

तो फलन f_1 तथा f_4 समुच्चय A से B में परिभाषित है, परन्तु f_2 तथा f_3 समुच्चय A से B में परिभाषित नहीं है।

कारण : f_2 के अवयव के दो प्रतिबिम्ब 2 तथा 3 हैं एवं इसी तरह f_3 में भी अर्थात् f_2 तथा f_3 फलन नहीं है।

4. प्रान्त

x के उन मानों का समुच्चय जिनके लिऐ f(x) परिभाषित है, y = f(x) का प्रान्त कहलाता है। उदाहरण के लिऐ $y = \log_e x$; $x > 0$ के लिऐ परिभाषित है अतः $y = \log_e x$ का प्रान्त R^+ है। फलन y = sin x जो प्रत्येक x के लिऐ परिभाषित है अतः sinx का प्रान्त R है।



स्मरणीय

(f + g + h.....)का प्रान्त
= f का प्रान्त $\cap$ g का प्रान्त $\cap$ h का प्रान्त.....
(f – g) का प्रान्त = f का प्रान्त $\cap$ g का प्रान्त
(f × g × h .....) का प्रान्त
= f का प्रान्त $\cap$ g का प्रान्त $\cap$ h का प्रान्त.....
(f/g) का प्रान्त
= f का प्रान्त $\cap$ g का प्रान्त – {x : g (x) = 0}

उदाहरण **प्रान्त पर आधारित**

उदा.3 फलन $f(x) = \log_{10} \sin x$ का प्रान्त ज्ञात कीजिऐ।

हल फलन f(x) के विद्यमान होने के लिए, sinx > 0 एवं y = sinx के लेखाचित्र से यह स्पष्ट है कि sin x धनात्मक है जबकि $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$

अतः f(x) का प्रान्त = $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$, जहाँ $n \in I$.

उदा.4 फलन $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ का प्रान्त ज्ञात कीजिऐ।

हल $x - |x| > 0 \Rightarrow x > |x|$

जैसा कि हम जानते हैं कि $|x| \geq x$.

$\Rightarrow$ f(x) का प्रान्त = ϕ.

उदा.5 फलन $f(x) = \sin x + \cos x + e^x \tan x$ का प्रान्त ज्ञात कीजिऐ।

हल sin x का प्रान्त = R

cos x का प्रान्त = R

tan x का प्रान्त $= R - \left\{\frac{2n+1}{2}\pi\right\}$

e^x का प्रान्त = R

$\therefore$ f का प्रान्त = sin x का प्रान्त $\cap$ cos x का प्रान्त $\cap$ e^x tanx का प्रान्त

$= R \cap R \cap R - \left\{\frac{2n+1}{2}\pi\right\}$

$= R - \left\{\frac{2n+1}{2}\pi\right\}$

5. परिसर

f(x) के उन सभी मानों का समुच्चय जो यह अपने प्रान्त के बिन्दुओं पर ग्रहण करता है, f(x) का परिसर कहलाता है।

उदाहरण परिसर पर आधारित

उदा.6 फलन $f(x) = \sqrt{\sin x}$ का परिसर ज्ञात कीजिऐ।

हल $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1$

$\therefore$ $\sqrt{\sin x}$ का परिसर f = [0, 1]

उदा.7 फलन $f(x) = 3^{\sin^{-1}x}$ का परिसर ज्ञात कीजिऐ।

हल $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$

$3^{-\pi/2} \leq 3^{\sin^{-1}x} \leq 3^{\pi/2}$

$\Rightarrow 3^{-\pi/2} \leq f(x) \leq 3^{\pi/2}$

$\therefore$ f का परिसर $= [3^{-\pi/2}, 3^{\pi/2}]$

6. फलन के प्रकार

फलन के प्रकार निम्नलिखित हैं :

6.1 एकैकी फलन (Injective) : एक फलन एकैकी कहलाता है यदि उसके प्रान्त के प्रत्येक अवयव का सह प्रान्त में भिन्न भिन्न प्रतिबिम्ब हों, एकैकी फलन को अन्तर्क्षेपण **(injective)** भी कहते हैं।

उदा. $f : R \to R^+ ; y = e^x$

$y = 2^{-x}$, $g : R \to R ; g(x) = 3x - 7$ एकैकी फलन हैं।

या, $f : A \to B$ एकैकी है

$\Leftrightarrow a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ सभी $a, b \in A$ के लिऐ

$\Leftrightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ सभी $a, b \in A$ के लिऐ

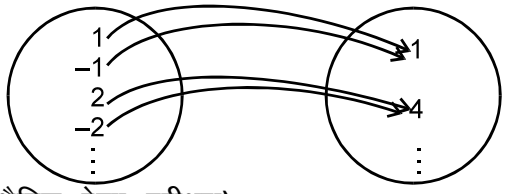
उदा. $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1}x$, $y = e^x$, $y = \log_e x$, ...

6.2 बहुऐकी फलन : एक फलन बहुऐकी फलन कहलाता है यदि समुच्चय के प्रान्त के दो या दो से अधिक भिन्न अवयवों के समान प्रतिबिम्ब समुच्चय के सहप्रान्त में विद्यमान हो

उदा. $f : R \to R^+ f(x) = x^2 + 4$

$g : R \to R^+ g(x) = x^8 + x^4 + x^2 + 4$ बहुऐकी फलन है।

उदा. $f(x) = x^2$



(क्षैतिज रेखा परीक्षण) :

यदि फलन $y = f(x)$ के लेखाचित्र दिया गया है तथा x - अक्ष के समान्तर रेखा वक्र को एक से अधिक बिन्दु पर काटती है तो फलन बहुएकी होगा।

या, $f : A \to B$ बहुएकी फलन है यदि $x, y \in A$ इस प्रकार से हो कि $x \neq y$ परन्तु $f(x) = f(y)$.

उदाहरणार्थ $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = x^2$, $y = x^4$, ...

6.3 आच्छादक फलन (Surjective) : फलन $f : X \to Y$ आच्छादक फलन होगा यदि सह प्रान्त Y के प्रत्येक अवयव का कम से कम एक पूर्व प्रतिबिम्ब प्रान्त X में विद्यमान हो अर्थात्

फलन f का परिसर = फलन f का सहप्रान्त

तो फलन f आच्छादक कहलाता है।

यदि फलन एकैकी एवं आच्छादक हो तो फलन को **एकैकी आच्छादक (Bijective)** कहते हैं।

या, $f : A \to B$ एकैकी आच्छादक है यदि और केवल यदि प्रत्येक $b \in B$, $\exists$ $a \in A$ के लिऐ इस प्रकार से कि $f(a) = b$.उदा. माना $f : R^+ \to R$, $y = \log_2 x$ द्वारा परिभाषित है, तब f(x) आच्छादक फलन है पर जब $f : R \to R$, $f(x) = \sin x$ द्वारा परिभाषित हो तब f(x) आच्छादक नहीं है।

6.4 अन्तर्क्षेपी फलन : एक फलन अन्तर्क्षेपी कहलाता है यदि सह प्रान्त Y के एक या एक से अधिक अवयव का प्रान्त X में प्रतिबिम्ब नहीं हो तो फलन f अन्तर्क्षेपी कहलाता है। दूसरे शब्दों में $f : A \to B$ एक अन्तर्क्षेपी फलन है यदि यह आच्छादक फलन नहीं है।

उदा. माना $f : R \to R$; $y = x^2 + 1$, द्वारा परिभाषित है तो f (x) एक अन्तर्क्षेपी फलन होगा परन्तु जब $f : R \to [0,\infty)$; $y = x^2$, तो f (x) अन्तर्क्षेपी फलन नहीं होगा।

स्मरणीय

(i) यदि f के प्रान्त में $\frac{dy}{dx} > 0$, $\forall$ x हो, तो फलन एकैकी है।

(ii) यदि f के प्रान्त में $\frac{dy}{dx} < 0$, $\forall$ x हो, तो फलन एकैकी है।

(iii) यदि सतत फलन f(x) जो स्थानीय निम्निष्ठ या उच्चिष्ठ या दोनों रखता हो, तो f(x) बहुऐकी होगा।

(iv) प्रत्येक सम फलन बहुऐकी होता है।

(v) प्रत्येक आवर्ती फलन बहुऐकी होता है।

7. जब फलन ''परिभाषित'' या ''अपरिभाषित'' कहलाता हो ::

यदि

(i) f (x) कुछ बिन्दुओं पर कुछ काल्पनिक मान देता हो

(ii) f(x) किसी अन्तराल में काल्पनिक मानों का समुच्चय रखता है

(iii) f(x) अनिर्धार्य रूप जैसे $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, ... में हो।

तो f(x) अपरिभाषित फलन कहलाता है।

यदि

(i) f(x) कुछ बिन्दुओं (मानाकि x = a) पर वास्तविक एवं अद्वितीय मान रखता हो।

(ii) f(x) किसी अन्तराल के संगत वास्तविक एवं अद्वितीय मान रखता हो, तो फलन f (x) परिभाषित कहलाता है।

फलन $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ से स्पष्ट है कि f(x) ; x = a पर परिभाषित नहीं है, क्योंकि $f(a) = \frac{0}{0}$ एवं अन्य बिन्दु पर पूर्णतः परिभाषित है क्योंकि f (x) का मान ; बिन्दु x = a के अलावा, ($x \neq a$ के लिऐ) वास्तविक एवं अद्वितीय है

पुनः माना कि $f(x) = \frac{1}{x - a}$, x = a पर, $f(x) = \infty$ अतः f(x) ; x = a पर परिभाषित नहीं है एवं $x \neq a$ के लिऐ परिभाषित है क्योंकि f(x) ; x के लिऐ वास्तविक है।

मानाकि $f(x) = \sqrt{x}$,

यहाँ f(x) ; x < 0 के लिऐ काल्पनिक मान रखता है अतः f(x) ; x < 0 के लिऐ परिभाषित नहीं है एवं f(x) ; $x \geq 0$ के लिऐ परिभाषित है।

मानाकि, $f(x) = \log_e x$

x < 0 के लिऐ; f(x) काल्पनिक है

x = 0 के लिऐ; $f(x) = -\infty$

x > 0 के लिऐ; f(x) वास्तविक है

यहाँ f(x) ; $x \leq 0$ के लिऐ परिभाषित नहीं है एवं x > 0 के लिऐ परिभाषित है।

उदाहरण **जब फलन परिभाषित या अपरिभाषित कहलाता है, पर आधारित**

उदा.8 मानाकि $f(x) = 3^{\cos^{-1}\left(\log_e \sqrt{1-e^{2x}}\right)}$

जहाँ f(x) अपरिभाषित है।

हल $\log_e \sqrt{1-e^{2x}} > 1$, या $\log_e \sqrt{1-e^{2x}} < -1$

एवं $1 - e^{2x} > 0 \Rightarrow x < 0$, ...(i)

$\Rightarrow \sqrt{1-e^{2x}} > e$, या $\sqrt{1-e^{2x}} < e^{-1}$

$\Rightarrow 1 - e^{2x} > e^2$, या $1 - e^{2x} < e^{-2}$

$\Rightarrow -e^{2x} > e^2 - 1$, या $-e^{2x} < e^{-2} - 1$

$\Rightarrow e^{2x} < 1 - e^2$, या $e^{2x} > 1 - e^{-2}$

$\Rightarrow$ परन्तु $e^{2x} > 0, \Rightarrow x > \frac{1}{2}(\log\ 1 - e^{-2})$ ...(ii)

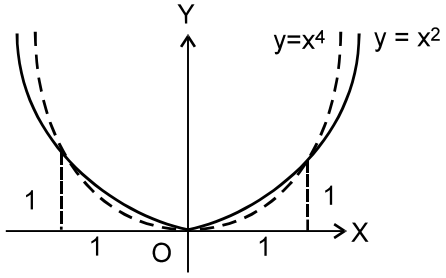
(i) तथा (ii) से f(x), $x \in (1/2 \log_e (1 - e^{-2}), 0)$ पर परिभाषित है **उत्तर**

8. मूलभूत प्रारंभिक फलन ::

मूलभूत प्रारंभिक फलन जिनका विश्लेषित निरूपण दिया गया है, निम्न है

8.1 घात फलन :

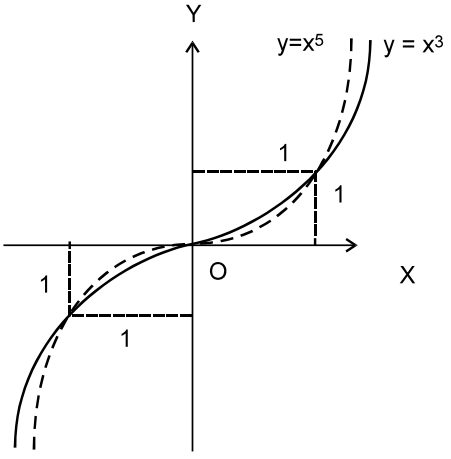
$y = x^n$, n परिमेय है (**नोट**)



प्रान्त : R

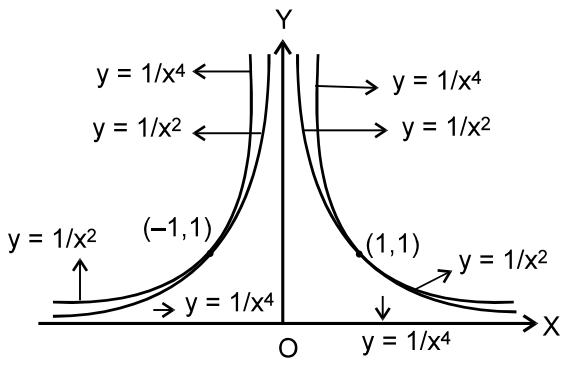
परिसर : $R^+ \cup \{0\}$

प्रकृति : बहुऐकी अन्तर्क्षेपी



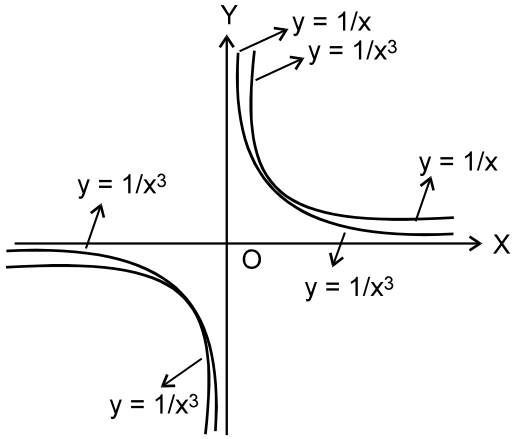
प्रान्त : R

परिसर : R प्रकृति : एकैकी आच्छादक



प्रान्त : R– {0}

परिसर : R^+ प्रकृति : बहुएकी अन्तर्क्षेपी

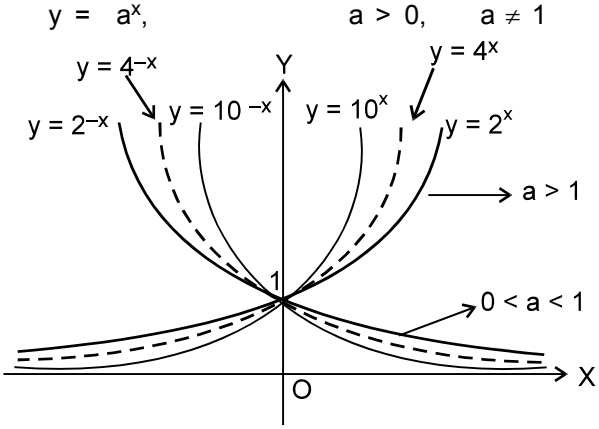


प्रान्त : R – { 0 } , परिसर : R – { 0 }

प्रकृति : एकैकी, अन्तर्क्षेपी

8.2 व्यापक चरघातांकी फलन :

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



प्रान्त : R , परिसर : R^+

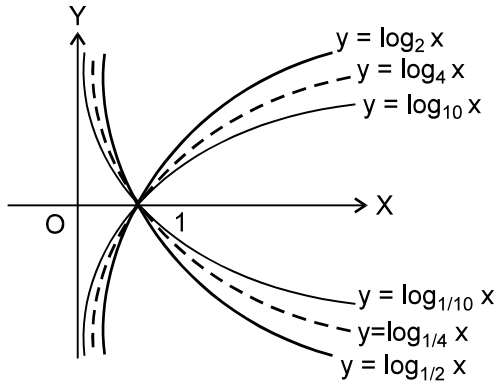
प्रकृति : एकैकी अन्तर्क्षेपी

नोट :

$a < 0$ के लिए आलेख अपरिभाषित है।

8.3 लघुगणकीय फलन :

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$



प्रान्त : R^+ , परिसर : R

प्रकृति : एकैकी अन्तर्क्षेपी

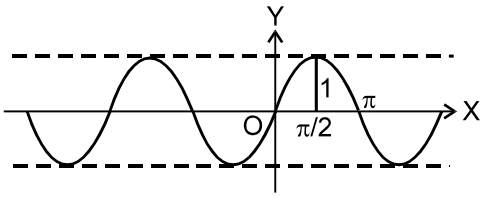
नोट :

जब आधार में वृद्धि होती है तो वक्र दोनों अक्षों के निकटतम होता है।

8.4 त्रिकोणमितीय फलन या वृत्तीय फलन :

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$
$y = \sec x$, $y = \cot x$, $y = \operatorname{cosec} x$

$y = \sin x$



प्रान्त : R , परिसर : [–1, 1]

प्रकृति : बहुऐकी अन्तर्क्षेपी

x का मुख्य मान :$[-\pi/2, \pi/2]$

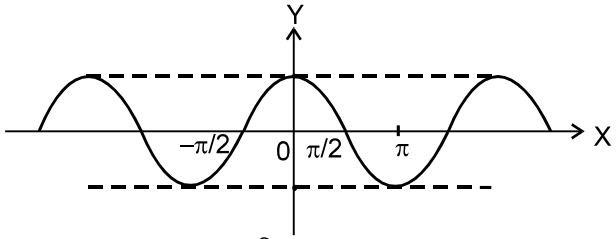
नोट :

फलन $y = \sin x$ का लेखाचित्र मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित है अर्थात् विपरीत चतुर्थांश में सममित है।

कारण:

sin x विषम फलन है एवं प्रत्येक विषम फलन मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित होता है।

$y = \cos x$



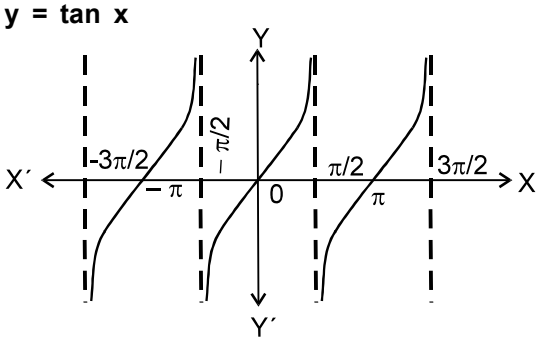
प्रान्त : R, परिसर : [–1, 1]

प्रकृति : बहुऐकी अन्तर्क्षेपी

x के मुख्य मान : $[0,\pi]$

स्पष्टतया cos x सम फलन है अतः यह y अक्ष के सापेक्ष सममित है।

y = tan x



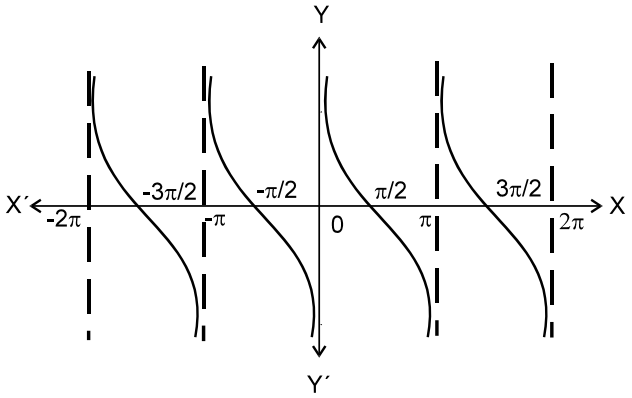
प्रान्त : $R - \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$

परिसर : $(-\infty, \infty)$

प्रकृति : बहुऐकी आच्छादक

मुख्य मान: $(-\pi/2, \pi/2)$

y = cot x

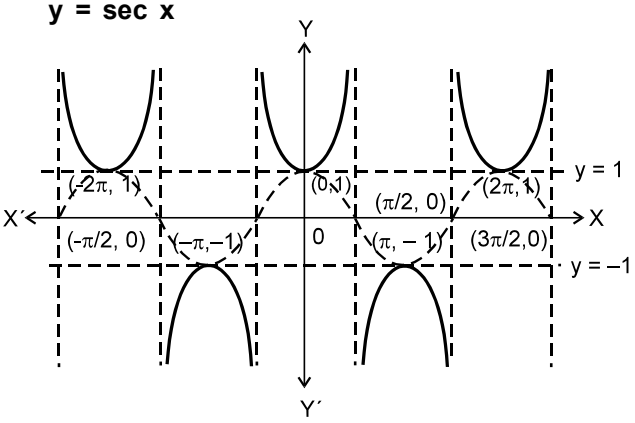


प्रान्त : $R - n\pi$, परिसर : $(-\infty, \infty)$

प्रकृति : बहुऐकी आच्छादक

मुख्य मान : $(0, \pi)$

y = sec x



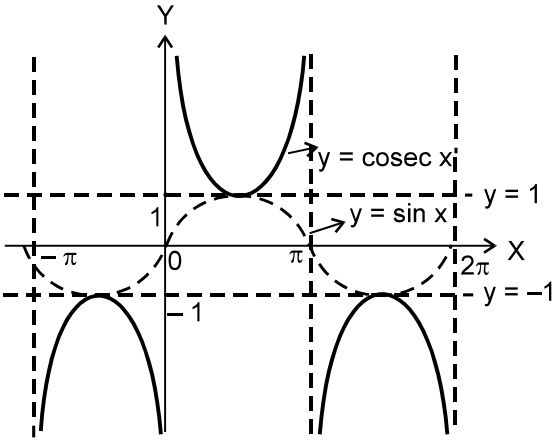
प्रान्त : $R - (2n+1)\pi/2$

परिसर : $R - (-1, 1)$ व $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

प्रकृति: बहुऐकी अन्तर्क्षेपी

मुख्य मान : y = cosx के समान

y = cosec x



प्रान्त : $R - n\pi$

परिसर : $R - (-1, 1)$ या $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

प्रकृति : बहुऐकी अन्तर्क्षेपी

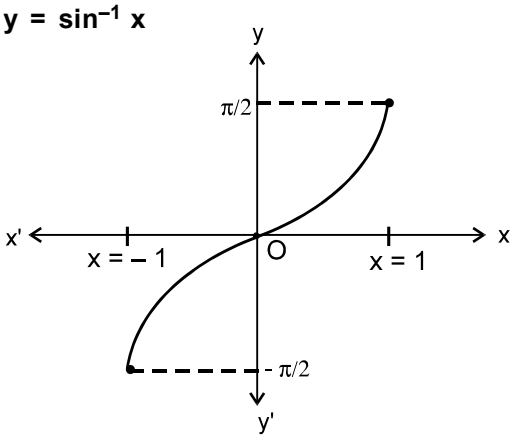
मुख्य मान : y = sinx के समान

8.5 प्रतिलोम वृत्तीय फलन या प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन:

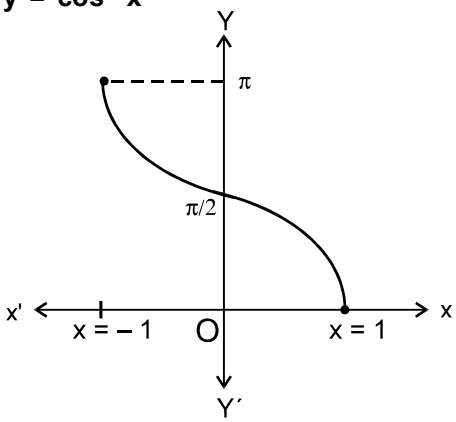
$y = \sin^{-1}x$, $y = \cos^{-1}x$, $y = \tan^{-1}x$

$y = \cot^{-1}x$, $y = \sec^{-1}x$, $y = \text{cosec}^{-1}x$

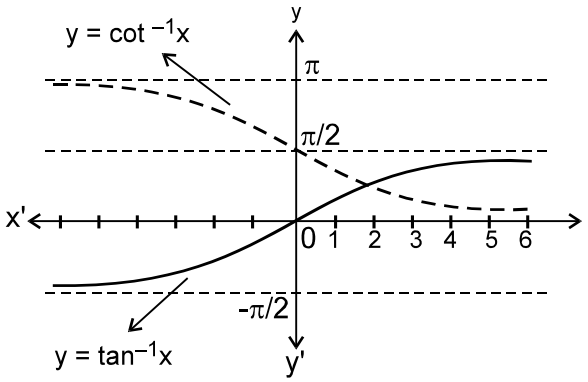
$y = \sin^{-1} x$



$y = \cos^{-1}x$



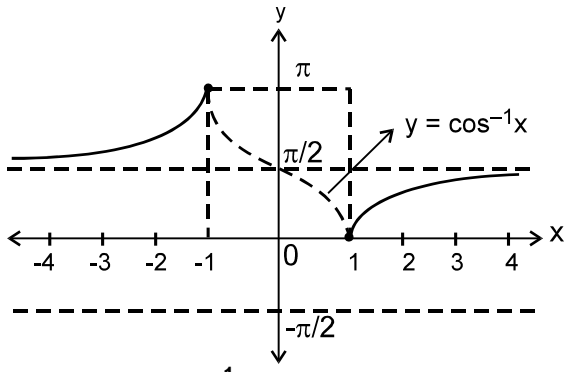
$y = \tan^{-1}x$ एवं $\cot^{-1}x$



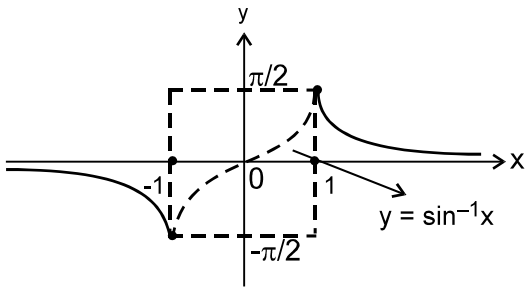
नोट :

सभी प्रतिलोम फलनों $f^{-1}(x)$ के वक्र $f(x)$ का रेखा $y = x$ के सापेक्ष परावर्तन लेकर बनाये जा सकते है।

$y = \sec^{-1}x$



$y = \text{cosec}^{-1}x$

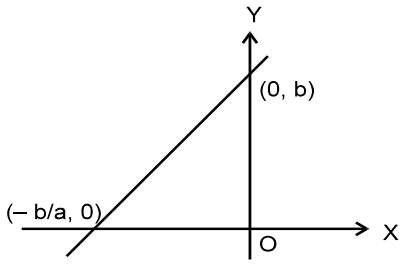


फलन	प्रान्त	परिसर
$\sin^{-1}$ x	[–1,1]	$[-\pi/2, \pi/2]$
$\cos^{-1}$ x	[–1,1]	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$ x	R	$(-\pi/2, \pi/2)$
$\cot^{-1}$ x	R	$(0, \pi)$
$\sec^{-1}$ x	R – (–1,1)	$[0, \pi] - \{\pi/2\}$
cosec^{-1} x	R – (–1,1)	$[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$

9.कुछ विशिष्ट फलन एवं उनके आलेख

9.1 रेखीय फलन :

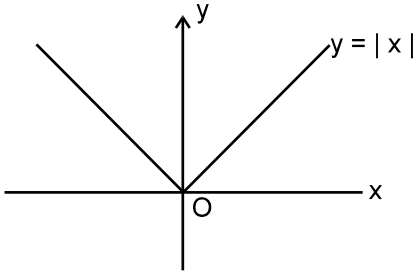
फलन $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ एवं $x \in R$
जहाँ a तथा b अचर हैं
प्रान्त : R, परिसर : R



9.2 मापाँक फलन :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

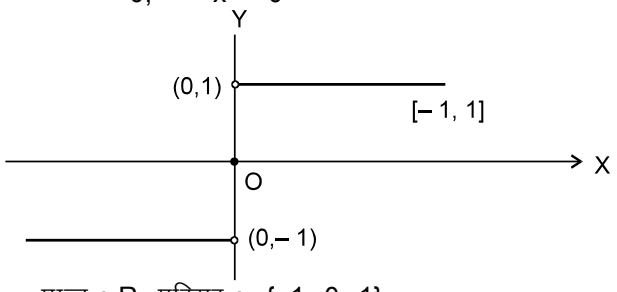
प्रान्त : R , परिसर : $[0, \infty)$
यह सम, सतत एवं बहुऐकी फलन है।
इसका आलेख y - अक्ष के सापेक्ष सममित है।



9.3 सिग्नम फलन :

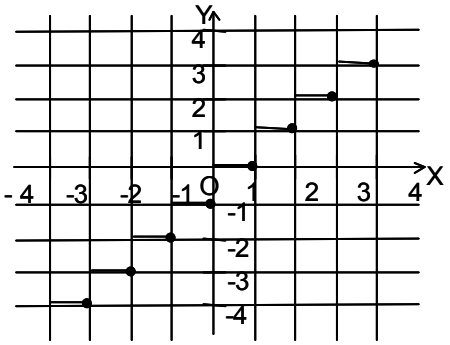
$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{या} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$= 0, \quad x = 0$



प्रान्त : R, परिसर : {–1, 0, 1}
यह बहुऐकी एवं असंतत फलन है।.

9.4 महत्तम पूर्णांक फलन : एक फलन महत्तम पूर्णांक फलन कहलाता है यदि यह $f(x) = [x]$ रूप में हो, जहाँ $[x]$ = महत्तम पूर्णांक $\leq x$ को दर्शाता है।
इस फलन का आलेख निम्न है



उदा.9 [4.2] = 4, [3.6] = 3,[– 4.4] = –5, [–5.8] = –6

$f(x) = y = [x]$

$0 \le x < 1 \Rightarrow y = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow y = 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow y = 2$

⋮ ⋮

एवं इसी प्रकार

नोट :

महत्वपूर्ण तत्समिकाऐं :

(i) $x - 1 < [x] \le x$

(ii) $[x] + 1 > x$

(iii) यदि $f(x) = [x + n]$, जहाँ $n \in I$ एवं [.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है, तो $f(x) = n + [x]$

(iv) $x = [x] + \{x\}$ जहाँ [.] एवं { } क्रमशः महत्तम पूर्णांक एवं भिन्नात्मक फलन को दर्शाता है।

(v) $x - 1 < [x] \le x$

$[-x] = -[x]$, यदि $x \in I$

$[-x] = -[x] - 1$, यदि $x \notin I$

$[x] - [-x] = 2n$, यदि $x = n$, $n \in I$

$[x] - [-x] = 2n + 1$, यदि $x = n + \{x\}$, $n \in I$

$[x] \ge n \Rightarrow x \ge n, n \in I$

$[x] \le n \Rightarrow x < n + 1, n \in I$

$[x] > n \Rightarrow x \ge n + 1, n \in I$

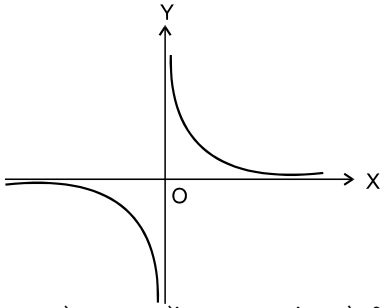
$[x] < n \Rightarrow x < n, n \in I$

9.5 आयताकार अतिपरवलय :

फलन $f(x) = 1/x$.

प्रान्त : $R - \{0\}$

परिसर : $R - \{0\}$



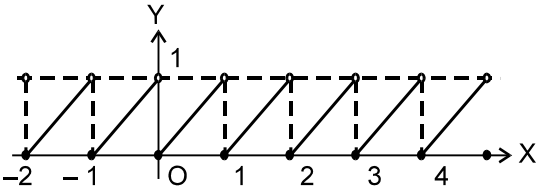
यह अपने प्रान्त में सतत एवं एकैकी आच्छादक फलन है

9.6 दशमलवांश (भिन्नात्मक) फलन x :

फलन $f(x) = x - [x]$, $x \in R$.

उदाहरणार्थ $f(x) = \{x\}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1,0) \\ x, & x \in [0,1) \\ x-1, & x \in [1,2) \\ 0, & x \in Z \end{cases}$$



प्रान्त : R, परिसर : [0, 1),

प्रकृति: बहुऐकी अन्तर्क्षेपी

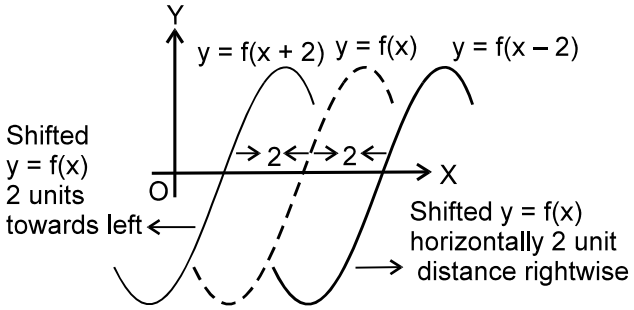
यह बहुऐकी फलन है जिसका आवर्तनाँक 1 है। यह प्रत्येक पूर्णांक पर असतत है।

10. रूपान्तरण

यदि y = f(x) का आलेख ज्ञात हो तो निम्न आलेख ज्ञात करने हेतु

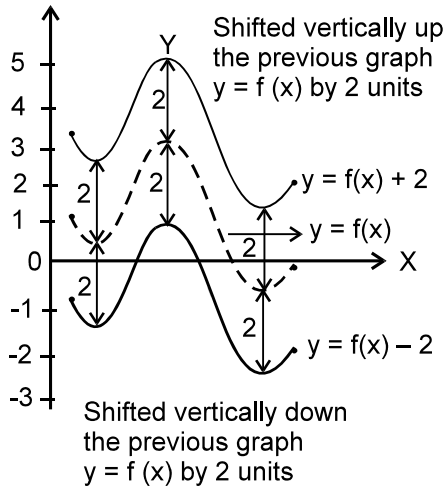
10.1 y = f(x – a) या y = f(x + a)

y = f(x – a) ज्ञात करने के लिऐ (माना a = 2)

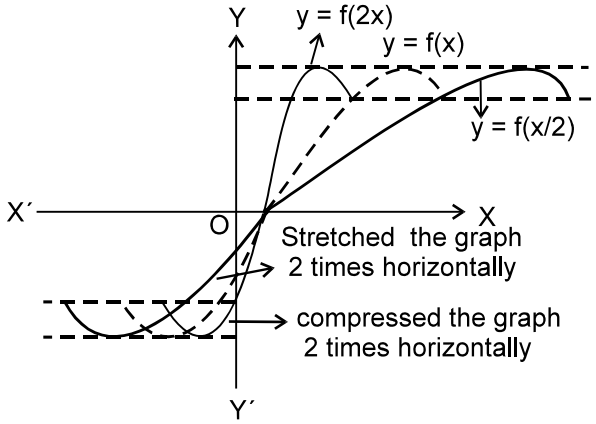


10.2 y = f (x) + a : या y = f (x) – a

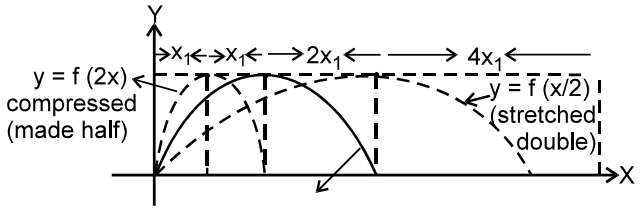
(माना a = 2)



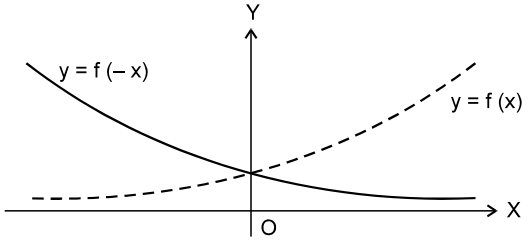
10.3 y = f $\left(\frac{x}{a}\right)$ या y = f(ax) : (माना a = 2, 1/2)



इसी प्रकार के और कई उदाहरण देंखें :



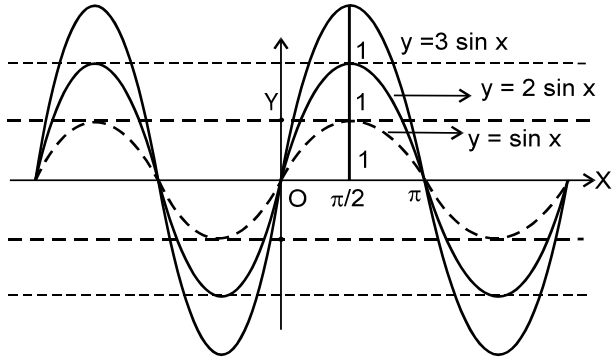
10.4 y = f (–x) :



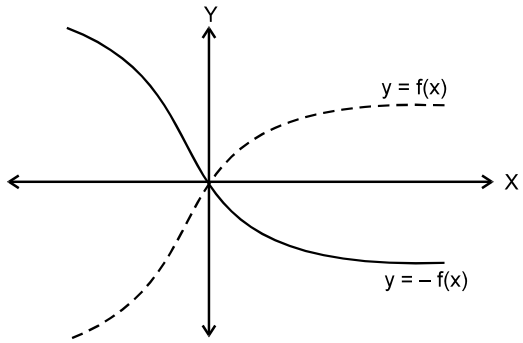
फलन y = f (x) का y अक्ष के सापेक्ष प्रतिबिम्ब y = f (– x) होता है।

10.5 y = k f (x) ज्ञात करने हेतु :

नियम – पूर्व आलेख को ऊर्ध्वाधर k गुणा खींचने पर अर्थात् फलन y = 2 sin x, y = 3 sinx को देखिऐ जो निम्न प्रकार प्रदर्शित हैं।

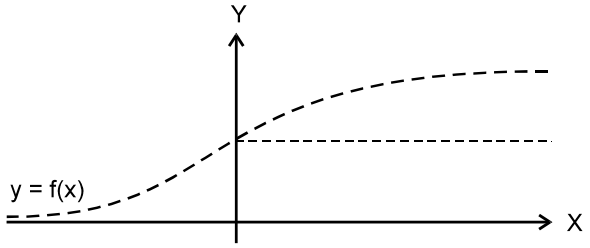


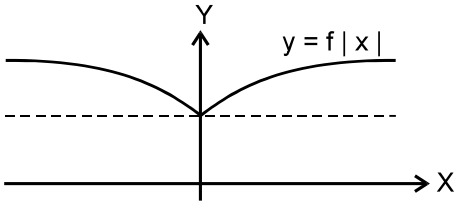
10.5.1 y = – f (x) :



फलन y = f (x) का x अक्ष के सापेक्ष प्रतिबिम्ब y = – f (x) होगा।

10.6 y = f | x | ज्ञात करने हेतु :





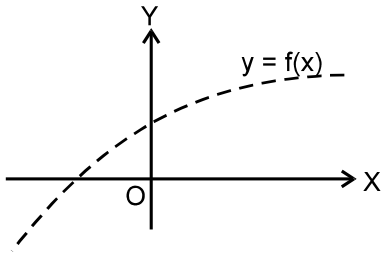
नियम :

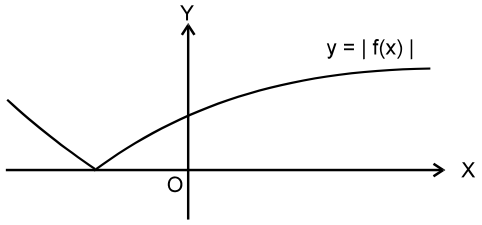
II^{nd} व III^{rd} चतुर्थांशों में उपस्थित वक्र की उपेक्षा कर दें, तथा

I व IV चतुर्थांश में स्थित आलेख का y अक्ष के सापेक्ष प्रतिबिम्ब लेने पर

मूल आलेख प्रतिबिम्ब सहित y = f | x | कहलाता है। यहाँ हम y अक्ष के सापेक्ष प्रथम चतुर्थांश में उपस्थित भाग का प्रतिबिम्ब लेते है तथा द्वितीय चतुर्थांश में उपस्थित भाग को छोड देते है।

10.7 y = | f (x) | को ज्ञात करने हेतु :





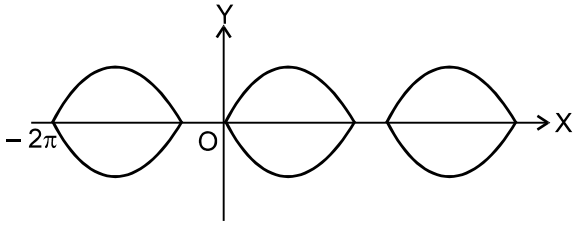
नियम :

x अक्ष के सापेक्ष x अक्ष के नीचे स्थित रेखा के भाग का प्रतिबिम्ब लेते है, x अक्ष के ऊपर के वक्र को पूर्ववत् रखते हैं।

उदाहरण **रूपान्तरण पर आधारित**

उदा.10 फलन | y | = sin x का आलेख खींचिऐ।

हल

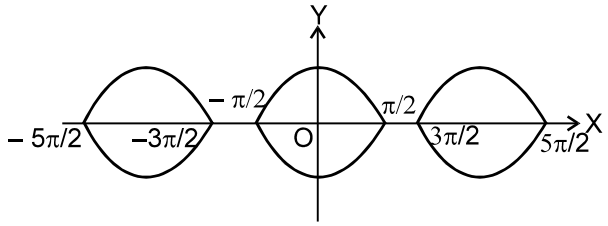


नोट :

फलन | y | = sin | x | का आलेख खींचने हेतु I व IV चतुर्थांश में उपस्थित भाग का y अक्ष के सापेक्ष दर्पण प्रतिबिम्ब लेते हैं।

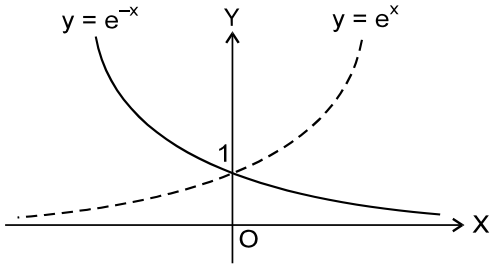
उदा.11 फलन | y | = cos x का आलेख खींचिऐ।

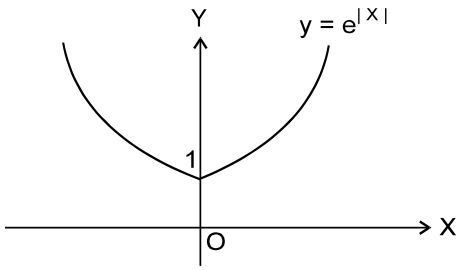
हल

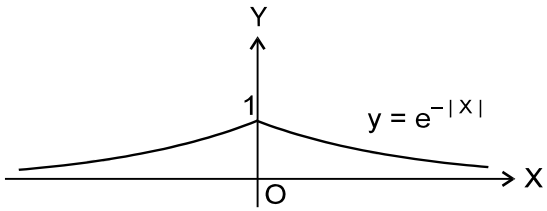


उदा.12 फलन $y = e^{-x}$, $y = e^{|x|}$, $y = e^{-|x|}$ के आलेख खींचिऐ।

हल

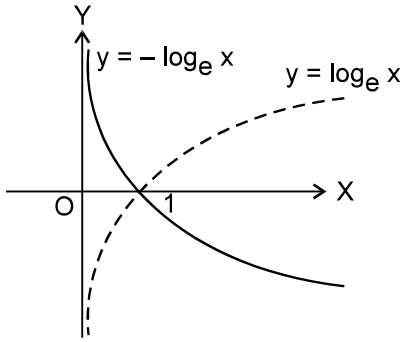


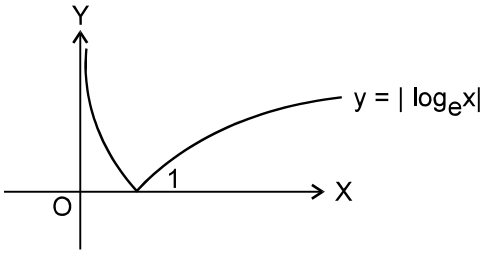


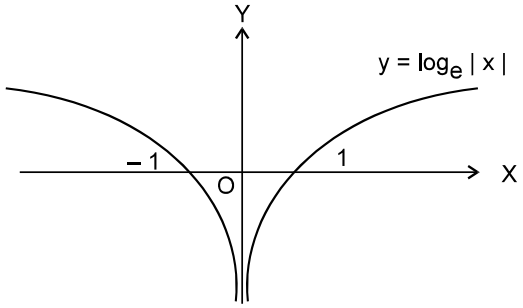


उदा.13 फलन $y = -\log_e x$, $y = |\log_e x|$, $y = \log_e |x|$ के आलेख खींचिऐ।

हल







11. प्रारंभिक फलन

यदि अंकगणितीय संक्रियाऐं (योगफल, शेषफल, गुणनफल, भागफल) एवं एक फलन के फलन की संक्रिया निश्चित बार प्रारंभिक फलन पर प्रयुक्त होती है तब परिणामी फलन प्रारंभिक फलन कहलाता है।

उदाहरण :

$$f(x) = \frac{x^2 \log_e x}{\sin x}$$

$$\phi(x) = \frac{x^2 + e^x + 5}{\sqrt{1 - \cos^{-1} x}}$$

$\psi(x) = \sin(\sin \sin \log_e x)$

$\alpha(x) = \cos(\text{sine}^x)$

12. फलन के अन्य निरूपण

12.1 स्पष्ट फलन : यदि y स्पष्टतया प्रत्यक्ष रूप में x के पदों में परिभाषित हो अर्थात् $y = f(x)$ तो y ; x का स्पष्ट फलन कहलाता है।

अर्थात् $y = x^2$, $y = \log_e x$, $y = \tan x$

12.2 अस्पष्ट फलन : यदि y अप्रत्यक्ष रूप से परिभाषित हो अर्थात् $f(x, y) = 0$ या $f(x, y) = k$, तो y अस्पष्ट फलन कहलाता है।

अर्थात् $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$, $xy = \sin(x + y)$.

12.3 प्राचलिक फलन : यदि x एवं y दोनों परतंत्र हों एवं एक नये स्वतंत्र चर (मानाकि t) द्वारा परिभाषित किये गऐ हों

$x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, जहाँ t प्राचल है।

इस प्रकार के फलन प्राचलिक फलन कहलाते हैं।

अर्थात् $x = t^2$, $y = 2t$

नोट :

ये फलन के प्रकार नहीं हैं वरन् फलनों को प्रदर्शित करने के सरल तरीके हैं।

13. प्रतिलोम फलन

यदि $f : A \to B$ एकैकी आच्छादक (bijection) फलन हो, तो प्रतिचित्रण $f^{-1} : B \to A$ जो प्रत्येक अवयव $b \in B$ को $a \in A$ से इस प्रकार सम्बन्धित करता हो कि $f(a) = b$, फलन $f : A \to B$ का प्रतिलोम फलन कहलाता है।

$f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(b) = a \Rightarrow f(a) = b$

जब फलन क्रमित युग्म रूप में दिया गया हो तो इसका प्रतिलोम फलन निम्न प्रकार से दिया जाता है -

$f^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in f\}$

नोट :

(1) प्रतिलोम फलन के अस्तित्व के लिऐ यह जरूरी है कि यह एकैकी एवं आच्छादक हो।

(2) जब फलन आच्छादक के साथ साथ एकैकी भी हो तो ऐसे फलन को एकैकी आच्छादक फलन कहते हैं।

13.1 प्रतिलोम फलन के गुणधर्म :

(a) एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम भी एकैकी आच्छादक होता है।

(b) एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

(c) $(f^{-1})^{-1} = f$

(d) यदि f एवं g ऐसे दो एकैकी आच्छादक फलन हों कि (gof) परिभाषित हो तो

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

(e) यदि $f : A \to B$ एकैकी आच्छादक हो तथा $f^{-1} : B \to A$, f का प्रतिलोम फलन हो तो

$f^{-1}of = I$ तथा $fof^{-1} = I$.

यहाँ I एक तत्समक फलन ($y = x$ तत्समक फलन कहलाता है) जो कि , f^{-1} of = $fof^{-1} = x$ है

उदाहरण प्रतिलोम फलन पर आधारित

उदा.14 यदि $f : R \to R$, $f(x) = 2x + 3$, तो $f^{-1}(x)$ ज्ञात कीजिऐ।

हल चूंकि f एकैकी आच्छादक है अतः इसका प्रतिलोम फलन विद्यमान है एवं $y = 2x + 3 \Rightarrow x = (y - 3)/2$

$$\Rightarrow y = \frac{x-3}{2} \qquad \therefore f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

उदा.15 यदि $f : R \to R$ जहाँ $f(x) = x^2 + 3x + 7$ तो $f^{-1}(7)$ ज्ञात कीजिऐ।

हल चूंकि $y = f(x)$ बहुऐकी फलन है अतः $f(x)$ का प्रतिलोम विद्यमान नहीं होगा अर्थात् $f^{-1}(7) = \phi$

उदा.16 यदि $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + 2$ तो $f^{-1}(x)$ ज्ञात कीजिऐ।

हल $f(x) = x^3 + 2$, $x \in R$.

चूंकि यह एकैकी आच्छादक फलन है अतः इस फलन का प्रतिलोम (f^{-1}) विद्यमान है।

माना $f^{-1}(x) = y$

$\therefore x = f(y) \Rightarrow x = y^3 + 2$

$\Rightarrow y = (x - 2)^{1/3}$

$\therefore f^{-1}(x) = (x - 2)^{1/3}$.

14. संयुक्त फलन

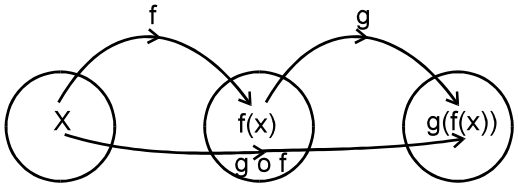
माना A, B व C तीन अरिक्त समुच्चय है तथा माना $f : A \to B$, $g : B \to C$ दो फलन है। चूंकि f : A से B में परिभाषित फलन है अतः प्रत्येक $x \in A$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $g(f(x)) \in C$ विद्यमान होगा।

उपरोक्त चर्चा से स्पष्ट होता है जब f तथा g को एक साथ सन्दर्भित किया जाता है तो वे A से C में नया फलन परिभाषित करते है इसे f तथा g का संयुक्त फलन कहते है तथा g o f द्वारा निरूपित करते है-

परिभाषा

माना $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ दो फलन है

तब एक फलन $gof : A \to C$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है $gof(x) = g(f(x)) \ \forall \ x \in A$, f तथा g का संयुक्त फलन कहलाता है



नोट :

परिभाषा से स्पष्ट है कि fog केवल $x \in A$ के लिये परिभाषित है f(x), g का एक अवयव है अतः हम इसका g - प्रतिबिम्ब ले सकते है अतः संयुक्त फलन gof के अस्तित्व के लिये यह आवश्यक है कि f का परिसर g के प्रान्त का उपसमुच्चय हो।

15. आवर्ती फलन

एक फलन y = f (x) आवर्ती फलन कहलाता है यदि धनात्मक नियतांक (माना T) के पूर्णांक गुणजों की एक श्रेणी इस प्रकार विद्यमान हो कि

f (x + T) = f (x + 2T) = f(x + 3T) = ...
f (x + nT) = f (x), $T \in R$

तब f(x) का आवर्तनाँक T, 2T, 3T, 4T, ... nT होगा परन्तु मूलभूत आवर्तनांक T है सांख्यिकीय समस्याओं में यदि शब्द **'आवर्तनांक'** से तात्पर्य मूलभूत आवर्तनांक से लिया जाता है।

स्मरणीय

फलन जिनका आवर्तनांक 2π है, निम्न है

1. $(\sin x)^{2n+1}$, $(\cos x)^{2n+1}$, $(\sec x)^{2n+1}$, $(\text{cosec } x)^{2n+1}$

फलन जिनका आवर्तनांक π है, निम्न है

2. $(\sin x)^{2n}$, $(\cos x)^{2n}$, $(\sec x)^{2n}$, $(\text{cosec} x)^{2n}$

3. $(\tan x)^n$, $(\cot x)^n$

4. $|\sin x|, |\cos x|, |\tan x|, |\cot x|, |\sec x|, |\text{cosec } x|$

5. यदि f(x) का आवर्तनांक T हो, तो f (± ax + b) का आवर्तनांक $\frac{T}{|a|}$ होगा

6. यदि $f_1(x)$ का आवर्तनांक T_1 हो एवं $f_2(x)$ का आवर्तनांक T_2 हो, तो फलन $af_1(x) + bf_2(x)$ का आवर्तनांक T_1 तथा T_2 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) होता है, जहाँ एक संख्या ' r ' इस प्रकार विद्यमान नहीं है कि $f_1(x + r) = f_2(x)$ एवं $f_2(x + r) = f_1(x)$ तथा $r \not< T_1$ तथा T_2 का LCM (इस स्थिति में आवर्तनांक = r) (**नोट**)

उदाहरणार्थ फलन | sin x | + | cos x | का आवर्तनांक $\pi/2$ है।

नोट : दो या दो से अधिक भिन्नात्मक संख्याओं का ल.स.प. (LCM)

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ का ल.स.प.

$= \frac{(a, c, e) \text{का ल.स.प.}}{(b, d, f) \text{का म.स.प.}}$

7. f (x) का आवर्तनांक = T $\Rightarrow$ 1/f (x) का आवर्तनांक =T

उदाहरण **आवर्ती फलन पर आधारित**

उदा.17 फलन f(x) = x + sinx – [x] का आवर्तनांक ज्ञात कीजिऐ।

हल दिया गया है f(x) = sinx + {x}
= g(x) + h(x)
g(x) का आवर्तनांक = 2π,
h(x) का आवर्तनांक = 1,
2π अपरिमेय है एवं 1 परिमेय है अतः ल.स.प. (LCM) विद्यमान नहीं है यदि अपरिमेय राशियाँ जैसे π, 2π या π, $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ या $\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 9\sqrt{3}$. LCM या HCF विद्यमान है अर्थात् यदि एक विशेष परिमेय राशि का गुणज विद्यमान हो तो LCM या HCF विद्यमान होता है।

उदा.18 f(x) = x – [x – m], $m \in I$ का आवर्तनांक ज्ञात कीजिऐ। जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है।

हल दिया गया है f(x) = x – [x – m]
= (x – m) – [x – m] + m
= {x – m} + m
$\because$ {x – m} आवर्ती है
$\therefore$ m + {x – m} भी आवर्ती है एवं आवर्तनांक 1 है
$\because$ {x} का आवर्तनांक = {x – a} का आवर्तनांक = 1

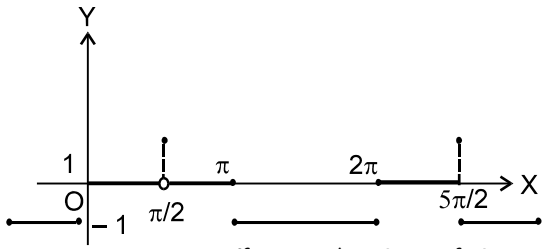
उदा.19 फलन y = [sinx] का आलेख खींचिऐ एवं आवर्तनांक ज्ञात कीजिऐ, यदि संभव हो।

हल $[\sin x] = 0,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$= 1,\ x = \frac{\pi}{2}$

$= 0,\ \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$= -1,\ \pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$, ...



स्पष्टतः f(x) आवर्ती फलन है एवं आवर्तनांक 2π है।

उदा..20 फलन $f(x) = \sin\left[\frac{x}{\pi}\right]$ का आलेख खींचिऐ, क्या यह आवर्ती है? यदि आवर्ती है तो आवर्तनांक ज्ञात कीजिऐ।

हल $0 \le \frac{x}{\pi} < \pi \Rightarrow \left[\frac{x}{\pi}\right] = 0$

$\pi \le x < 2\pi \Rightarrow \left[\frac{x}{\pi}\right] = 1$

$2\pi \le x < 3\pi \Rightarrow \left[\frac{x}{\pi}\right] = 2$

$3\pi \le x < 4\pi \Rightarrow \left[\frac{x}{\pi}\right] = 3$

स्पष्टतः f(x) आवर्ती नहीं है।

16. सम एवं विषम फलन

16.1 परिभाषा : यदि, $f(-x) = f(x)$, तो $y = f(x)$ सम फलन कहलाता है एवं

यदि $f(-x) = -f(x)$, तो $y = f(x)$ विषम फलन कहलाता है।

16.2 सम एवं विषम फलन के गुणधर्म :

(a) दो सम फलनों का गुणनफल भी सम फलन होता है।

(b) दो सम फलनों का योग एवं अन्तर भी सम फलन होता है।

(c) दो विषम फलनों का योग एवं अन्तर भी विषम फलन होता है।

(d) दो विषम फलनों का गुणनफल सम फलन होता है।

(e) एक सम फलन व एक विषम फलन का गुणनफल विषम फलन होता है।

(f) सम एवं विषम फलन का योग ना सम होता है ना ही विषम होता है।

(g) यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक फलन सम या विषम हो यह संभव है कि कुछ फलन न सम होते हैं और ना विषम।

(h) सम फलन y-अक्ष के सापेक्ष व विषम फलन मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित होते है

उदा. $f(x) = x^2 + x^3$, $f(x) = \log_e x$, $f(x) = e^x$ न विषम और न सम फलन है।

उदा. $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sec x$, $f(x) = x^4$, ... ये सम फलनों के उदाहरण हैं।

उदा. $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cot x$, $f(x) = x^3$, ... ये विषम फलनों के उदाहरण हैं।

नोट :

शून्य फलन f (x) = 0 ही केवल वह फलन है जो कि सम व विषम दोनों है।

उदाहरण सम एवं विषम फलन पर आधारित

उदा.21 यदि $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ तो क्या यह सम या विषम फलन है -

हल $f(-x) = \frac{a^{-x} + 1}{a^{-x} - 1} = -\frac{a^x + 1}{a^x - 1}$

$\therefore\ f(-x) = -f(x)$

$\therefore\ f(x)$ विषम फलन है।

17. बीजीय फलन

1. परिमेय पूर्णांक फलन या बहुपद : एक फलन जो कि निम्न रूप में है,

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots\ldots a_nx^n$, जहाँ $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots a_n$ वास्तविक नियतांक हैं परिमेय पूर्णांक फलन या n घात के बहुपद कहलाते हैं।

2. भिन्नात्मक परिमेय फलन: वह फलन जो कि दो बहुपदों के अनुपात के रूप में हो एक परिमेय फलन कहलाता है।

अर्थात् $y = \frac{x^{12} + x^2 - 1}{x^6 + x^4 + 1}$

3. अपरिमेय फलन : वे फलन जो चरों की अपूर्णांक परिमेय घातों के योग, व्यवकलन गुणा तथा भाग आदि संक्रियाओं से बने हों अपरिमेय फलन कहलाते है।

$y = \sqrt{x}$, $y = \frac{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^{11}}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

$y = \frac{x^{17/3} + x^{103/7} - x}{\sqrt[3]{x^{17} + x^{15} - 3}}$

$y = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + 5} + x^{16.5} + x^{1/3}}}{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{\sqrt{x^{2/3} - 1}}}$

इस प्रकार के फलन **अपरिमेय फलन** कहलाते हैं।

4. अबीजीय फलन : ऐसे फलन जो बीजीय न हों अबीजीय फलन कहलाते हैं।

अर्थात् $f(x) = \sin x$, $y = \cos^{-1}x$

$y = \log_e x$, $y = \sqrt{\log_e x - \sin^{-1} x}$

$y = \dfrac{\log_e x + \tan x}{\sin^{-1} x + 2^x}$ etc.

18. परिबद्ध फलन

फलन f (x) ऊपरी परिबद्ध कहलाता है यदि M इस प्रकार विद्यमान है ताकि प्रान्त के सभी x के लिऐ $y = f(x) \not> M$ (अर्थात् M से अधिक नहीं) एवं M ऊपरी परिबन्ध कहलाता है। इसी प्रकार से f (x) निम्न परिबद्ध फलन कहलाएगा यदि फलन इस प्रकार विद्यमान है कि प्रान्त के सभी x के लिऐ $y = f(x) \not< m$ (अर्थात् m से कम नहीं) एवं m निम्न परिबन्ध कहलाता है।

यदि M विद्यमान नहीं हो एवं m उपरोक्तानुसार हो, तो फलन अपरिबद्ध कहलाता है।

19. फलन का विस्तार

माना $f : A \to B$ इस प्रकार से है कि

$f(x) = y \ \forall \ x \in A$

यदि $X \supset A$ अर्थात् X ; A का अधि समुच्चय (super set) कहलाता है एवं $Y \supset f(A)$ तो अन्य फलन $g : X \to Y$ जो इस प्रकार से है कि

$g(x) = f(x) \ \forall \ x \in A$

समुच्चय A से X में f का विस्तार कहलाता है।

19.1 सम एवं विषम विस्तार : माना कि f (x); A = [0, a] पर परिभाषित फलन है एवं x = [–a, a]; A का अधि समुच्चय है तो f (x) का x = [–a, a] पर विस्तार सम या विषम विस्तार होगा यदि f (x) सम या विषम फलन हो।

उदाहरण **फलन के विस्तार पर आधारित**

उदा.22 यदि $f(x) = x^2 + 5x - 2$ अन्तराल A = [0, 2] में परिभाषित फलन है तो f (x) का अन्तराल [–2, 2] में सम या विषम विस्तार ज्ञात कीजिऐ।

हल $f(x) = x^2 + 5x - 2$, $f(-x) = x^2 - 5x - 2$

यदि g_e एवं g_o सम एवं विषम विस्तार को प्रदर्शित करते हों, तो

$$g_e(x) = \begin{cases} f(x) : x \in [0, 2] \\ f(-x) : x \in [-2, 0) [\because f(-x) = f(x) \text{ सम के लिये}] \end{cases}$$

$$g_o(x) = \begin{cases} f(x) : x \in [0, 2] \\ -f(-x) : x \in [-2, 0) [\because -f(-x) = f(x) \text{ विषम के लिये}] \end{cases}$$

$$g_e(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 2 : x \in [0, 2] \\ x^2 - 5x - 2 : x \in [-2, 0 [\end{cases}$$

$$g_o(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 2 : x \in [0, 2] \\ -x^2 + 5x + 2 : x \in [-2, 0 [\end{cases}$$

SOLVED EXAMPLES

उदा.1 फलन $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{1+x}$ के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल f(x) का प्रान्त $= \{x \mid 2-x \geq 0$ एवं $1+x \geq 0\}$

$\therefore$ f(x) का प्रान्त $= [-1, 2]$

पुनः $\{f(x)\}^2 = \left(\sqrt{2-x} + \sqrt{1+x}\right)^2$

$= 3 + 2\sqrt{(2-x)(1+x)}$

$= 3 + 2\sqrt{2+x-x^2}$

$= 3 + 2\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$

$\therefore \{f(x)\}^2$ का महत्तम मान

$= 3 + 2.\sqrt{\frac{9}{4}} = 6$, जबकि $x = \frac{1}{2}$

$\{f(x)\}^2$ का न्यूनतम मान $= 3 + 0 = 3$,

जबकि $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

अर्थात् $x = 2$

$\therefore$ f (x) का महत्तम मान $= \sqrt{6}$

एवं f (x) का न्यूनतम मान $= \sqrt{3}$

$\therefore$ f(x) का परिसर $= [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$

उदा.2 फलन $f(x) = \frac{3}{2-x^2}$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल मानाकि $y = \frac{3}{2-x^2} = f(x)$ ....(1)

फलन y ; $x = \pm\sqrt{2}$ के लिए परिभाषित नहीं है।

समीकरण (1) से,

$$x^2 = \frac{2y-3}{y}$$

चूँकि वास्तविक x के लिए, $x^2 \geq 0$,

$$\frac{2y-3}{y} \geq 0$$

$\therefore$ $y \geq 3/2$ या $y < 0$ $(y \neq 0)$

अतः फलन का परिसर $]-\infty, 0[\cup [3/2, \infty)$

उदा.3 निम्न फलन का परिसर ज्ञात कीजिए:

$$f(x) = \log_2\left(\frac{\sin x - \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

हल $\because$ $f(x) = \log_2\left(\frac{\sin x - \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

$= \log_2\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 3\right) = y$(माना)

$\Rightarrow$ $2^y = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 3$

$\Rightarrow$ $2^y - 3 = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

लेकिन $-1 \leq \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$\therefore$ $-1 \leq 2^y - 3 \leq 1$

$\Rightarrow$ $2 \leq 2^y \leq 4$

$\Rightarrow$ $2^1 \leq 2^y \leq 2^2$

अतः $y \in [1, 2]$

फलन f(x) का परिसर [1, 2] है।

उदा.4 निम्न फलन का आवर्तनांक ज्ञात कीजिए

$f(x) = e^{x-[x]+|\cos \pi x|+|\cos 2\pi x|+\ldots\ldots+|\cos n\pi x|}$,

जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है।

हल $f(x) = e^{x-[x]+|\cos \pi x|+|\cos 2\pi x|+\ldots\ldots+|\cos n\pi x|}$

$x - [x]$ का आवर्तनांक $= 1$

$|\cos \pi x|$ का आवर्तनांक $= 1$

$|\cos 2\pi x|$ का आवर्तनांक $= 1/2$

.....

.....

$|\cos n\pi x|$ का आवर्तनांक $= 1/n$

अतः f(x) का आवर्तनांक, सभी आवर्तनांकों का L.C.M. = 1 होगा।

उदा.5 फलन $f : R \to R$ $f(x) = x - [x]$, (जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन $\leq x$), सभी $x \in R$ के लिए, परिभाषित हो तो क्या फलन एकैकी आच्छादक है?

हल यदि $x_1, x_2 \in R$

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow$ $x_1 - [x_1] = x_2 - [x_2]$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2$

$\therefore$ फलन एकैकी आच्छादक नहीं है।

उदा.6 यदि $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}(x-1)^{1/3}, & x<1\\ (x-1)^{1/2}, & x\geq 1\end{cases}$ तो gof (x) ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $gof(x) = g(f(x))$

$$=\begin{cases}g(x^3+1), & x<0\\ g(x^2+1), & x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}(x^3+1-1)^{1/3} & x<0\\ (x^2+1-1)^{1/2}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}=x;\ \text{सभी x के लिए}$$

अतः, gof (x) = x; सभी x के लिए

उदा.7 $n \in I$ का मान जिनके लिए फलन

$f(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin(x/n)}$ का आवर्तनांक 4π है -

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 4

हल n = 2 के लिए,

चूँकि $\dfrac{\sin 2x}{\sin(x/2)} = 4(\cos x/2)\cos x.$

cos x का आवर्तनांक 2π एवं cos(x/2) का आवर्तनांक 4π है।

अतः $\dfrac{\sin 2x}{\sin(x/2)}$ का आवर्तनांक 4π है।

एवं $\dfrac{\sin 3x}{\sin(x/3)}, \dfrac{\sin 5x}{\sin(x/5)}$

तथा $\dfrac{\sin 4x}{\sin(x/4)}$ का आवर्तनांक 4π नहीं है।

उत्तर [A]

उदा.8 सिद्ध करो कि सम फलनों के प्रतिलोम विद्यमान नहीं होते।

हल सम फलन बहुएकैकी फलन हैं एवं प्रतिलोम फलन विद्यमान होने के लिए जरूरी है कि फलन एकैकी हो अतः सम फलन का प्रतिलोम विद्यमान नहीं होगा।

उदा.9 सिद्ध करो कि आवर्ती फलनों के प्रतिलोम विद्यमान नहीं होते।

हल f (x) आवर्ती है

$\Rightarrow$ f बहुएकैकी है

$\Rightarrow f^{-1}$ विद्यमान नहीं है।

उदा.10 प्रदर्शित करो कि सभी $x \in R$ के लिए फलन $f(x) = 3x^3 + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ एकैकी आच्छादक है।

हल एकैकी के लिए : यदि x, y ; R(प्रान्त) के कोई दो अवयव हों तो इस प्रकार,

$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x^3 + 5 = 3y^3 + 5$

$\Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$

इस प्रकार, f (x) = f (y)

$\Rightarrow$ x = y सभी $x, y \in R$ के लिए

अतः, f एकैकी प्रतिचित्रण है।

आच्छादक के लिए : माना y ; R(सह प्रान्त) का कोई स्वैच्छ अवयव हो, तब,

$f(x) = y \Rightarrow 3x^3 + 5 = y \Rightarrow x^3 = \dfrac{y-5}{3}$

$\Rightarrow x = \left(\dfrac{y-5}{3}\right)^{1/3}$

इस प्रकार सभी $y \in R$ (सह प्रान्त) के लिए $x = \left(\dfrac{y-5}{3}\right)^{1/3} \in R$ (सह प्रान्त) इस प्रकार से विद्यमान है कि

$$f(x) = f\left(\left(\frac{y-5}{3}\right)^{1/3}\right) = 3\left[\left(\frac{y-5}{3}\right)^{1/3}\right]^3 + 5$$

$$= y - 5 + 5 = y$$

यह प्रदर्शित करता है कि सह प्रान्त के प्रत्येक अवयव का प्रान्त में पूर्व प्रतिबिम्ब है अतः f आच्छादक है इसलिए f एकैकी आच्छादक फलन है।

उदा.11 माना, $f(x) = x + 1, \quad x \leq 1$

$= 2x + 1, \quad 1 < x \leq 2$

$g(x) = x^2, \quad -1 \leq x < 2$

$= x + 2, \quad 2 \leq x \leq 3$

तो fog एवं gof ज्ञात कीजिए।

हल

$f\{g(x)\} = g(x) + 1, \quad g(x) \leq 1$

$= 2g(x) + 1, \quad 1 < g(x) \leq 2$

$\Rightarrow f\{g(x)\} = x^2 + 1, \quad -1 \leq x \leq 1$

$= 2x^2 + 1, \quad 1 < x \leq \sqrt{2}$

$g\{f(x)\} = \{f(x)\}^2, \quad -1 \leq f(x) < 2$

$= f(x) + 2, \quad 2 \leq f(x) \leq 3$

$gof(x) = (x+1)^2, \quad -2 \leq x < 1$

$= (x+1)^2 \quad -2 \leq x \leq 1$

उदा.12 निम्न का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \le x \le 4 \\ 8\sqrt{x}, & x > 4 \end{cases}$$

हल यदि $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \le x \le 4 \\ 8\sqrt{x}, & x > 4 \end{cases}$

मानाकि $f(x) = y \qquad \therefore x = f^{-1}(y)$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} y, & y < 1 \\ \sqrt{y}, & 1 \le y \le 16 \\ y^2/64, & y > 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y < 1 \\ \sqrt{y}, & 1 \le y \le 16 \\ y^2/64, & y > 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \le x \le 16 \\ x^2/64, & x > 16 \end{cases}$$

उदा.13 माना $f(x) = x^2 + x$ अन्तराल $[0, 2]$ में परिभाषित है तो $f(x)$ के अन्तराल $[-2, 2]$ में विषम एवं सम विस्तार ज्ञात कीजिए।

हल विषम विस्तार

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le 2 \\ -f(-x), & -2 \le x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + x, & 0 \le x \le 2 \\ -x^2 + x, & -2 \le x < 0 \end{cases}$$

सम विस्तार

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le 2 \\ f(-x), & -2 \le x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + x, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - x, & -2 \le x < 0 \end{cases}$$

उदा.14 यदि $f : R \to R$; $f(x) = (x + 1)^2 - 1$, $x \ge -1$ तो प्रदर्शित करो कि f प्रतिलोमी है एवं समुच्चय $S = \{x : f(x) = f^{-1}(x)\}$ ज्ञात कीजिए।

हल फलन $f(x)$ को प्रतिलोमी प्रदर्शित करने के संदर्भ में यह पर्याप्त है कि $f(x)$ एकैकी आच्छादक हो।

f एकैकी है : किन्हीं $x, y \in R$ के लिए $x \ge -1, y \ge -1$,

हम जानते हैं कि $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow (x + 1)^2 - 1 = (y + 1)^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y \Rightarrow x^2 - y^2 = -2(x - y)$

$\Rightarrow (x - y)(x + y) = -2(x - y)$

$\Rightarrow (x - y)[x + y + 2] = 0$

$\Rightarrow x - y = 0$ या $x + y + 2 = 0$

$\Rightarrow x = y$ या $x = y = -1$

अतः $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ सभी $x \ge -1, y \ge -1$ के लिए अतः $f(x)$ एकैकी है।

f आच्छादक है : सभी $y \ge -1$ के लिए

$x = -1 + \sqrt{y+1} \ge -1$ इस प्रकार से है कि

$f(x) = y$ अतः $f(x)$ आच्छादक है।

अतः f एकैकी आच्छादक है परिणामतः यह प्रतिलोम है।

$f(x) = f^{-1}(x) \quad \Rightarrow f(x) = x$

$(x + 1)^2 - 1 = x \quad \Rightarrow x = 0, -1$

उदा.15 यदि f, g, h फलन; R से R में इस प्रकार परिभाषित हो कि

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,

$h(x) = 0$, यदि $x \le 0$

$= x$, यदि $x \ge 0$

तो संयुक्त फलन ho(fog) ज्ञात कीजिए एवं ज्ञात कीजिए कि क्या फलन fog प्रतिलोमीय है एवं फलन h तत्समक फलन है।

हल यहाँ $f(x) = x^2 - 1$; सभी x के लिए

एवं $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; सभी x के लिए

$\therefore f\{g(x)\} = \{g(x)\}^2 - 1$

$= x^2 + 1 - 1$

$= x^2$ सभी x के लिए

$\therefore h\{f(g(x))\} = h(x^2) = x^2$

क्योंकि $x^2 \ge 0$ [h(x) की परिभाषा से]

अब, $f\{g(x)\} = x^2$ सभी x के लिए

जैसाकि $x^2 \ge 0$, $(fog)(x)$ ऋणात्मक नहीं हो सकता

अतः fog आच्छादक फलन नहीं है अतः fog प्रतिलोमी नहीं है पुनः $h(x) = x$; $x \ge 0$ के लिए

लेकिन परिभाषा से $h(x) \ne x$; $x < 0$ के लिए

अतः h तत्समक फलन नहीं है।

उदा.16 मानाकि $f(x) = \tan x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ एवं

$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल f के दिए गए प्रान्त $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि इसका परिसर $]-\infty, \infty[$ अर्थात् R है।

g का प्रान्त $1 - x^2 \ge 0$ या $x^2 - 1 \le 0$

या $(x + 1)(x - 1) \le 0$ या $-1 \le x \le 1$ या $[-1, 1]$ है

एवं g के परिसर के लिए, $y = \sqrt{1 - x^2}$

चूँकि $x^2 \le 1$

$\therefore \quad y \in [0, 1]$

$(fog)\, x = f(g(x)) = f\{\sqrt{1-x^2}\}$

$= f(t)$, जहाँ $t = \sqrt{1-x^2} \in [0, 1]$

g का परिसर $\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ जो कि f का प्रान्त है

$= \tan t = \tan \sqrt{1-x^2}$

$(gof)\, x = g(f(x)) = g(\tan x) = g(t)$

जहाँ $t = \tan x \in f$ का परिसर $= R$

परन्तु R ; g के प्रान्त $[-1, 1]$ का उपसमुच्चय नहीं है अतः gof परिभाषित नहीं है।

उदा.17 मानाकि $f_1(x) = \frac{x}{3} + 10$ सभी $x \in R$ के लिए, एवं $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$; $n \geq 2$ के लिए तो $f_n(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)),\ n \geq 2$

$\Rightarrow \quad f_2(x) = f_1(f_1(x)) = \frac{1}{3} f_1(x) + 10$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + 10\right) + 10 = \frac{x}{3^2} + \frac{10}{3} + 10$

$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = \frac{1}{3} f_2(x) + 10$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3^2} + \frac{10}{3} + 10\right) + 10$

$= \frac{x}{3^3} + \frac{10}{3^2} + \frac{10}{3} + 10$

$f_4(x) = f_1(f_3(x)) = \frac{1}{3} f_3(x) + 10$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3^3} + \frac{10}{3^2} + \frac{10}{3} + 10\right) + 10$

$= \frac{x}{3^4} + \frac{10}{3^3} + \frac{10}{3^2} + \frac{10}{3} + 10$

इसी तरह आगे हम प्राप्त करते हैं

$f_n(x) = \frac{x}{3^n} + \frac{10}{3^{n-1}} + \frac{10}{3^{n-2}} + ... + \frac{10}{3} + 10$

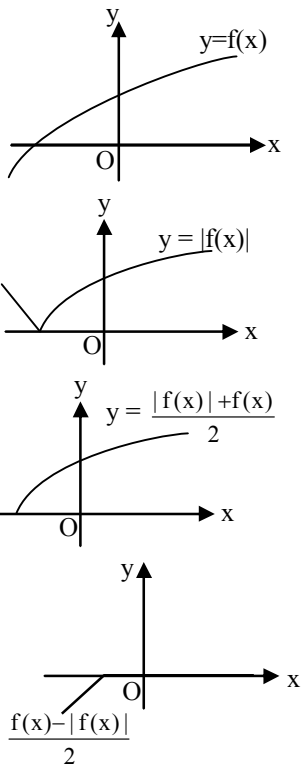
$= \frac{x}{3^n} + 10\left(\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$= \frac{x}{3^n} + 15\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{x-15}{3^n} + 15$

उदा.18 $y = f(x)$ के आलेख से निम्न के लेखाचित्र खींचिए

$y = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$ एवं $y = \frac{f(x)-|f(x)|}{2}$

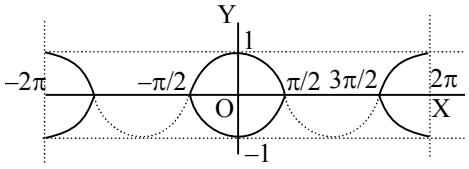
हल माना कि लेखाचित्र



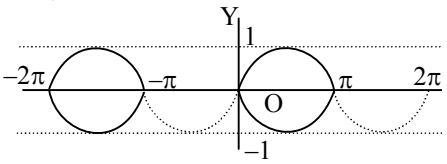
उदा.19 निम्न ग्राफ बनाईये :

(i) $|y| = \cos x$ (ii) $|y| = \sin x$

हल (i) $|y| = \cos x$



(ii) $|y| = \sin x$



Exercise (Level) 1

प्रश्न प्रान्त पर आधारित

Q.1 $y = \log_{10}\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)$ का प्रान्त है :

(A) (0, 5) (B) [1, 4]
(C) $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ (D) $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

Q.2 $f(x) = \frac{\sqrt{-\log_{0.3}(x-1)}}{\sqrt{x^2 + 2x + 8}}$ का प्रान्त है :

(A) (1, 4) (B) (–2, 4) (C) (2, 4) (D) [2, ∞)

Q.3 यदि फलन

$f(x) = \cot^{-1}\sqrt{(x+3)x} + \cos^{-1}\sqrt{x^2 + 3x + 1}$,

S पर परिभाषित हो, तो S बराबर है :

(A) {0, 3} (B) (0, 3)
(C) {–3, 0} (D) [–3, 0]

Q.4 $\sqrt{\sec^{-1}\left(\frac{2 - |x|}{4}\right)}$ का प्रान्त है -

(A) R (B) R – (–1, 1)
(C) R – (–3, 3) (D) R – (– 6, 6)

Q.5 फलन $f(x) = {}^{24-x}C_{3x-1} + {}^{40-6x}C_{8x-10}$ का प्रान्त है -

(A) {2, 3} (B) {1, 2, 3}
(C) {1, 2, 3, 4} (D) इनमें से कोई नहीं

Q.6 फलन $f(x) = (1 - 3x)^{1/3} + 3\cos^{-1}\left(\frac{2x-1}{3}\right) + 3^{3\tan^{-1}x}$ का प्रान्त है -

(A) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ (B) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
(C) [–1, 2] (D) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

Q.7 फलन $f(x) = \frac{\sec^{-1}x}{\sqrt{x - [x]}}$, जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता हो, तो यह किस x के लिए परिभाषित होगा -

(A) R
(B) $R - \{(-1, 1) \cup \{n : n \in Z\}\}$
(C) $R^+ - (0, 1)$
(D) $R^+ - \{n : n \in N\}$

Q.8 फलन $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{|x| - 3}{2}\right) + [\log_e (4 - x)]^{-1}$ किस के लिए परिभाषित होगा -

(A) $[-1, 0] \cup [1, 5]$
(B) $[-5, -1] \cup [1, 4]$
(C) $[-5, -1] \cup ([1, 4) - \{3\})$
(D) $[1, 4] - \{3\}$

Q.9 फलन $f(x) = \log|\log x|$ का प्रान्त है -

(A) (0, ∞) (B) (1, ∞)
(C) $(0, 1) \cup (1, \infty)$ (D) (–∞, 1)

Q.10 फलन $f(x) = \frac{1}{\log_{10}(3 - x)} + \sqrt{x + 2}$ का प्रान्त है -

(A) [–2, 3) (B) [–2, 3) – {2}
(C) [–3, 2] (D) [–2, 3] – {2}

प्रश्न परिसर पर आधारित

Q.11 फलन $y = \frac{1}{2 - \sin 3x}$ का परिसर है :

(A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left[\frac{1}{3}, 1\right)$
(C) $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ (D) इनमें से कोई नहीं

Q.12 फलन $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3}$ का मान निम्न अन्तराल में स्थित है -

(A) $(-\infty, \infty) - \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ (B) $(-\infty, \infty)$
(C) $(-\infty, \infty) - \{1\}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Q.13 फलन $y = \log_{\sqrt{7}}(\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 5)$ का परिसर है -

(A) R (B) Z

(C) $[\log_7 4, \log_7 5]$ (D) $[2 \log_7 3, 2]$

Q.14 निम्न में से किस फलन का परिसर [–1, 1] है -

(A) $f(x) = \cos(2 \sin x)$

(B) $g(x) = \cos\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$

(C) $h(x) = \sin(\log_2 x)$

(D) $k(x) = \tan(e^x)$

Q.15 फलन $f(x) = \cos(\cos^{-1}\{x\})$ का परिसर है

(जहाँ $\{\cdot\}$ भिन्नात्मक भाग फलन है)

(A) [0, 1) (B) [0, 1]

(C) (0, 1) (D) (0, 1]

Q.16 माना $f(x) = \frac{x - [x]}{1 - [x] + x}$, तब f(x) का परिसर है

([.] = महत्तम पूर्णांक फलन) -

(A) [0, 1] (B) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (D) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

Q.17 फलन $y = \log_3(5 + 4x - x^2)$ का परिसर है -

(A) (0, 2] (B) $(-\infty, 2]$

(C) (0, 9] (D) इनमें से कोई नहीं

प्रश्न फलनों के वर्गीकरण पर आधारित

Q.18 यदि $f : R \to R$ तो $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + x + 1}$ है :

(A) एकैकी एवं अन्तर्क्षेपी

(B) एकैकी एवं आच्छादक

(C) बहुएकैकी एवं आच्छादक

(D) बहुएकैकी एवं अन्तर्क्षेपी

Q.19 $f : [2, \infty) \to Y$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x) = x^2 - 4x + 5$ एकैकी एवं आच्छादक दोनों होगा, यदि :

(A) Y = R (B) Y = [1, ∞)

(C) Y = [4, ∞) (D) Y = [5, ∞)

Q.20 माना $f : R \to R$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + \sin x$ है, तो f होगा :

(A) एकैकी एवं आच्छादक

(B) एकैकी एवं अन्तर्क्षेपी

(C) बहुएकैकी एवं आच्छादक

(D) बहुएकैकी एवं अन्तर्क्षेपी

Q.21 निम्न में से कौनसा फलन, $A = \{x : -1 \le x \le 1\}$ से इसी में एकैकी आच्छादक फलन है -

(A) $f(x) = \frac{x}{2}$ (B) $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

(C) $h(x) = |x|$ (D) $k(x) = x^2$

Q.22 यदि $f : \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] \to [-1, 1]$;

$f(x) = \sin(2x + 1)$ द्वारा परिभाषित है, तब f है -

(A) एकैकी अन्तर्क्षेपी

(B) बहुएकैकी आच्छादक

(C) एकैकी आच्छादक

(D) बहुएकैकी अन्तर्क्षेपी

Q.23 समुच्चय A से A में परिभाषित एकैकी आच्छादक फलनों की संख्या होगी जबकि A में 106 अवयव हैं।

(A) 106 (B) 106!

(C) 106^{106} (D) $106^{106} - 106!$

प्रश्न फलन के प्रतिलोम पर आधारित

Q.24 यदि $f(x) = x^3 - 1$ एवं f का प्रान्त = {0,1, 2, 3}, तो f^{-1} का प्रान्त होगा -

(A) {0, 1, 2, 3} (B) {1, 0, –7, –26}

(C) {–1, 0, 7, 26} (D) {0, –1, –2, –3}

Q.25 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ का प्रतिलोम फलन है -

(A) $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ (B) $\frac{1}{2} \log \frac{2+x}{2-x}$

(C) $\frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x}$ (D) $2 \log(1 + x)$

प्रश्न संयुक्त फलन पर आधारित

Q.26 फलन f(x) जो अन्तराल [0, 1] में परिभाषित है, तो फलन $f[\ell n(1-x^2)]$ का प्रान्त होगा :

(A) $x \in \{0\}$

(B) $x \in [-\sqrt{1+e}-1] \cup [1+\sqrt{1+e}]$

(C) $x \in (-\infty, \infty)$

(D) इनमें से कोई नहीं

Q.27 यदि $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 3$, तथा $g: R \to R$, $g(x) = 2x + 1$ हो, तो $f^{-1}og^{-1}(23)$ बराबर है -

(A) 2 (B) 3

(C) $(14)^{1/3}$ (D) $(15)^{1/3}$

Q.28 यदि $f(x) = e^{3x}$ तथा $g(x) = \ell n\, x, x > 0$ हो, तो (fog) (x) बराबर है -

(A) 3x (B) x^3

(C) log 3x (D) 3 log x

Q.29 यदि $f(x) = x^3 - x$ तथा $g(x) = \sin 2x$, तो -

(A) g [f(1)] = 1 (B) $f\left(g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = -\frac{3}{8}$

(C) g {f(2)} = sin 2 (D) इनमें से कोई नहीं

प्रश्न आवर्ती फलन पर आधारित

Q.30 यदि $f: R \to R$ ऐसा फलन है कि $f(x+1) + f(x+3) = 2\ \forall\ x \in R$ है, तो फलन f (x) का आवर्तनांक (मूल आवर्तनांक नहीं हो सकता है) होगा -

(A) 3 (B) 4

(C) 7 (D) 6

Q.31 फलन $f(x) = x + a - [x + b] + \sin \pi x + \cos 2\pi x + \sin 3\pi x + \cos 4\pi x + \ldots + \sin(2n-1)\pi x + \cos 2n\pi x\ \forall\ a, b \in R$ का मूल आवर्तनांक है (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है)

(A) 2 (B) 4

(C) 1 (D) 0

Q.32 माना $f(x) = \sin \sqrt{[a]}\, x$ (जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है) यदि f आवर्ती है जिसका मूल आवर्तनांक π है, तब a निम्न अंतराल में होगा -

(A) [2, 3) (B) {4, 5}

(C) [4, 5] (D) [4, 5)

Q.33 फलन $f(x) = \left|\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ का मूलभूत आवर्तनांक है -

(A) π (B) 2π

(C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 4π

Q.34 $f(x) = \cos(\sin x) + \cos(\cos x)$ का मूलभूत आवर्तनांक है -

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$

(C) π (D) $\frac{\pi}{2}$

Q.35 फलन $f(x) = |\sin \pi x| + e^{3(x-[x])}$ का मूलभूत आवर्तनांक (जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है) है-

(A) 1 (B) 2

(C) $\frac{1}{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

प्रश्न सम तथा विषम फलन पर आधारित

Q.36 निम्न में से कौनसा सम फलन है ?

(A) $x\,\frac{a^x-1}{a^x+1}$ (B) tan x

(C) $\frac{a^x - a^{-x}}{2}$ (D) $\frac{a^x+1}{a^x-1}$

Q.37 निम्न में से कौनसा फलन विषम फलन है

(A) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

(B) $f(x) = x\left(\frac{a^x+1}{a^x-1}\right)$

(C) $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)$

(D) f(x) = k (अचर)

प्रश्न **विविध बिन्दुओं पर आधारित**

Q.38 उन बिन्दुओं का समुच्चय जिनके लिए $f(x) = \cos(\sin x) > 0$ निम्न को समाहित करता है -

(A) $(-\infty, 0]$

(B) $[-1, 1]$

(C) $(-\infty, \infty)$

(D) सभी सही हैं

Q.39 यदि $[x]$; x के लिए महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है, तब $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1000}\right]+\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{1000}\right]+...+\left[\frac{1}{2}+\frac{999}{1000}\right] =$

(A) 498 (B) 499

(C) 500 (D) 501

Q.40 माना फलन $f(x) = 3x^2 - 4x + 8 \log(1 + |x|)$ अन्तराल $[0, 1]$ पर परिभाषित है। अन्तराल $[-1, 0]$ में फलन $f(x)$ का सम विस्तार है -

(A) $3x^2 + 4x + 8 \log(1 + |x|)$

(B) $3x^2 - 4x + 8 \log(1 + |x|)$

(C) $3x^2 + 4x - 8 \log(1 + |x|)$

(D) $3x^2 - 4x - 8 \log(1 + |x|)$

Q.41 मानाकि $f : N \to N$ जहाँ $f(x) = x + (-1)^{x-1}$ तब f है-

(A) स्वयं का प्रतिलोमी

(B) सम फलन

(C) आवर्ती फलन

(D) तत्समक फलन

Exercise (Level) 2

केवल एक सही विकल्प प्रकार के प्रश्न

Q.1 यदि $\frac{\cos(\sin nx)}{\tan(x/n)}$ $(n \in N)$ का मूलभूत आवर्तनांक 6π है तो n बराबर है –
(A) 3 (B) 2
(C) 6 (D) 1

Q.2 माना $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ एवं $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$ है, तब दो फलन किस समुच्चय पर बराबर है -
(A) ϕ
(B) $R - \left\{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$
(C) R
(D) इनमें से कोई नहीं

Q.3 फलन $\sin\left(\log\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}\right)\right)$ का प्रान्त तथा परिसर है
(A) [–2, 1), (–1, 1) (B) (–2, 1), [–1, 1]
(C) (–2, 1), R (D) इनमें से कोई नहीं

Q.4 $\sin^{-1}\left[x^2 + \frac{1}{2}\right] + \cos^{-1}\left[x^2 - \frac{1}{2}\right]$ जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है, का परिसर है -
(A) $\left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ (B) $\{\pi\}$
(C) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Q.5 माना $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ तथा $f(x) + f(1 - x) = 1$, तब $f\left(\frac{1}{1996}\right) + \left(\frac{2}{1996}\right) + \ldots + f\left(\frac{1995}{1996}\right)$ का मान है -
(A) 998 (B) 997
(C) 997.5 (D) 998.5

Q.6 यदि f(x) एक बहुपद हैं जो $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ को सन्तुष्ट करता है तथा f(4) = 65 तब f(6) =
(A) 176 (B) 217
(C) 289 (D) इनमें से कोई नहीं

Q.7 माना $f : R \to R$, $f(x) = \frac{\sin([x]\pi)}{x^2 + 2x + 4}$ के द्वारा परिभाषित है, [.] = महत्तम पूर्णांक फलन, तब असत्य है -
(A) f आवर्ती है (B) f सम है
(C) f बहुऐकी है (D) f आच्छादक है

Q.8 माना $f : R \to R$ एक फलन है जो $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ के द्वारा परिभाषित है तब f है -
(A) एकैकी (B) आच्छादक
(C) एकैकी आच्छादक (D) इनमें से कोई नहीं

Q.9 निम्न में से कौनसे फलन समान है ?
(A) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$
(B) $f(x) = \log x^2$, $g(x) = 2 \log x$
(C) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
(D) $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = 1$

Q.10 माना $f : (4, 6) \to (6, 8)$ एक फलन है जो $f(x) = x + \left[\frac{x}{2}\right]$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है तो $f^{-1}(x)$ बराबर है
(A) x – 2 (B) $x - \left[\frac{x}{2}\right]$
(C) – x – 2 (D) इनमें से कोई नहीं

Q.11 वह अन्तराल जिसके लिए $\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$ है, होगा -
(A) $[0, \infty)$ (B) [0, 3] (C) [0, 1] (D) [0, 2]

Q.12 फलन $f(x) = \sqrt{\log_{10}\cos(2\pi x)}$ का अस्तित्व है -
(A) x के किसी भी परिमेय मान के लिए
(B) केवल तब, जबकि x धनात्मक पूर्णांक हो
(C) केवल तब, जबकि x भिन्नांश हो
(D) शून्य सहित x के किसी भी पूर्णांक मान के लिए

Q.13 फलन $\sec^{-1}[x^2 - x + 1]$ का प्रान्त है.
(जहाँ [·] महत्तम पूर्णांक फलन है)
(A) [0, 1]
(B) $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$
(C) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
(D) इनमें से कोई नहीं

Q.14 फलन $f(x) = \frac{\cot^{-1} x}{\sqrt{\{x^2 - [x^2]\}}}$ का प्रान्त है, जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक $\le x$ को दर्शाता है -

(A) R

(B) $R - \{\pm \sqrt{n} : n \in I^+ \cup \{0\}\}$

(C) $R - \{0\}$

(D) $R - \{n : n \in I\}$

Q.15 फलन $f(x) = \log\{(\log x)^2 - 5 \log x + 6\}$ का प्रान्त बराबर है -

(A) $(0, 10^2)$ (B) $(10^3, \infty)$

(C) $(10^2, 10^3)$ (D) $(0, 10^2) \cup (10^3, \infty)$

Q.16 यदि $A = \left\{x : \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}\right\}$ तथा $f(x) = \cos x - x(1 + x)$ तब f(A) बराबर है -

(A) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

(B) $\left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{\pi}{3}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

(D) $\left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)\right]$

Q.17 यदि A सभी त्रिभुजों का तथा B धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तब प्रतिचित्रण $f : A \to B$ जो $f(\Delta) = \Delta$ का क्षेत्रफल $(\Delta \in A)$ से परिभाषित है, होगा-

(A) एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन है

(B) एकैकी आच्छादक फलन है

(C) बहुएकैकी अन्तर्क्षेपी फलन है

(D) बहुएकैकी आच्छादक फलन है

Q.18 माना $f : R \to A = \left\{y \mid 0 \le y < \frac{\pi}{2}\right\}$ एक फलन इस प्रकार है कि $f(x) = \tan^{-1}(x^2 + x + k)$, जहाँ k अचर है, k का वह मान जिसके लिए f आच्छादक फलन है, होगा -

(A) 1 (B) 0

(C) $\frac{1}{4}$ (D) कोई नहीं

Q.19 निम्न में से कौनसा फलन एकैकी प्रतिचित्रण नहीं है -

(A) $f(x) = |x + 1|, x \in [-1, \infty)$

(B) $g(x) = x + \frac{1}{x}; x \in (0, \infty)$

(C) $h(x) = x^2 + 4x - 5 ; x \in (0, \infty)$

(D) $k(x) = e^{-x} ; x \in [0, \infty)$

Q.20 माना f एक एकैकी प्रतिचित्रण है जिसका प्रान्त {x, y, z} तथा परिसर {1, 2, 3} है, इस प्रकार है कि निम्न में से ठीक एक कथन सत्य है तथा शेष असत्य है : $f(x) = 1$, $f(y) \ne 1$, $f(z) \ne 2$ तब $f^{-1}(1)$ का मान है-

(A) x (B) y

(C) z (D) इनमें से कोई नहीं

Q.21 माना $f : R \to R$ तथा $g : R \to R$ दो एकैकी तथा आच्छादक फलन इस प्रकार है कि यह रेखा $y = 0$ के सापेक्ष एक दूसरे का दर्पण प्रतिबिम्ब है, तो $h(x) = f(x) + g(x)$ है -

(A) एकैकी तथा आच्छादक

(B) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं

(C) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं

(D) न एकैकी और न आच्छादक

Q.22 $f(x) = e^{\cos\{x\}} + \sin \pi[x]$ का मूलभूत आवर्तनांक है (जहाँ, [.] तथा { } क्रमशः महत्तम पूर्णांक फलन तथा भिन्नात्मक भाग फलन है)

(A) 1 (B) 2 (C) π (D) 2π

Q.23 यदि $f(x) = \cos(ax) + \sin(bx)$ आवर्ती है, तब निम्न में से कौनसा कथन असत्य है -

(A) a व b दोनों परिमेय हैं

(B) अनावर्ती है यदि a परिमेय है परन्तु b अपरिमेय है

(C) अनावर्ती है यदि a अपरिमेय है परन्तु b परिमेय है

(D) इनमें से कोई नहीं

Q.24 यदि $f : [-20, 20] \to R$ जो $f(x) = \left[\frac{x^2}{a}\right] \sin x + \cos x$ द्वारा परिभाषित है, एक सम फलन है, तो a के मानों का समुच्चय है (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है) -

(A) $(-\infty, 100)$ (B) $(400, \infty)$

(C) $(-400, 400)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Q.25 माना f एक फलन है जो $f(x + y) = f(x).\ f(y)$ को सभी $x, y \in R$ के लिए संतुष्ट करता है। यदि $f(1) = 3$ तब $\sum_{r=1}^{n} f(r)$ बराबर है -

(A) $\frac{3}{2}(3^n - 1)$

(B) $\frac{3}{2} n (n + 1)$

(C) $3^{n+1} - 3$

(D) इनमें से कोई नहीं

Q.26 यदि $f(x) = [x^2] - [x]^2$ जहाँ $[\cdot]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है तथा $x \in [0, 2]$, तब $f(x)$ के मानों का समुच्चय है -

(A) $\{-1, 0\}$ (B) $\{-1, 0, 1\}$

(C) $\{0\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$

Q.27 फनल $f(x) = \frac{3}{4 - x^2} + \log_{10}(x^3 - x)$ का प्रांत होगा -

(A) $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

(B) $(1, 2)$

(C) $(-1, 0) \cup (1, 2)$

(D) $(1, 2) \cup (2, \infty)$

Q.28 यदि $f : R \to R$ सभी $x, y \in R$ के लिये $f(x + y) = f(x) + f(y)$ को संतुष्ट करता है तथा $f(1) = 7$, तो $\sum_{r=1}^{n} f(r)$ बराबर है -

(A) $\frac{7n(n+1)}{2}$ (B) $\frac{7n}{2}$

(C) $\frac{7(n+1)}{2}$ (D) $7n\ (n+1)$

Q.29 निम्न में से कौनसा फलन स्वयं का प्रतिलोम है -

(A) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (B) $g(x) = 5^{\log x}$

(C) $h(x) = 2^{x(x-1)}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Q.30 यदि $f(\theta) = \frac{(2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 4\theta - 1).....(2\cos 2^{n-1}\theta - 1)}{2\cos 2^n \theta + 1}$

जहाँ $n \in N$ तथा $\theta \neq 2m\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $m \in I$, तब $f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

(A) $1 - \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$

(C) $\sqrt{2} + 1$ (D) इनमें से कोई नहीं

Exercise (Level) 3

OLD EXAMINATION QUESTIONS [JEE MAIN]

Q.1 माना f : (–1, 1) → B इस प्रकार परिभाषित है $f(x) = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ है। यदि फलन f एकैकी तथा आच्छादक है तो अन्तराल B होगा **[AIEEE-2005]**

(A) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Q.2 एक वास्तविक मान फलन f(x) फलनीय समीकरण f(x – y) = f(x) f(y) – f (a – x) f(a + y) को सन्तुष्ट करता है, जहाँ a दिया गया अचर है तथा f(0) = 1 तो f(2a – x) का मान है - **[AIEEE-2005]**

(A) –f(x) (B) f(x)
(C) f(a) + f(a – x) (D) f(–x)

Q.3 $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ के मध्य स्थित वह अधिकतम अन्तराल, जिसके लिये फलन $f(x) = 4^{-x^2} + \cos^{-1}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \log(\cos x)$ परिभाषित है, होगा - **[AIEEE-2007]**

(A) [0, π] (B) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
(C) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Q.4 माना f : N → Y ; f(x) = 4x + 3 द्वारा परिभाषित एक फलन है जहाँ Y = |y ∈ N : y = 4x + 3 किसी x ∈ N| के लिए, तब f का प्रतिलोम है - **[AIEEE 2008]**

(A) $g(y) = 4 + \frac{y+3}{4}$ (B) $g(y) = \frac{y+3}{4}$
(C) $g(y) = \frac{y-3}{4}$ (D) $g(y) = \frac{3y+4}{3}$

Q.5 वास्तविक x के लिए माना $f(x) = x^3 + 5x + 1$, तब - **[AIEEE 2009]**

(A) f, R में एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं
(B) f, R में आच्छादक है परन्तु एकैकी नहीं
(C) f, R में एकैकी तथा आच्छादक है
(D) f, R में ना तो एकैकी है ना ही आच्छादक

Q.6 माना $f(x) = (x + 1)^2 - 1$, $x \geq -1$

कथन - 1 : समुच्चय $\{x : f(x) = f^{-1}(x)\} = \{0, -1\}$.

कथन - 2 : f एकैकी आच्छादक है **[AIEEE 2009]**

(A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है तथा कथन-2, कथन -1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है परन्तु कथन-2, कथन -1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन-1 सत्य है परन्तु कथन-2 असत्य है।
(D) कथन-1 असत्य है रपन्तु, कथन-2 सत्य है।

Q.7 फलन $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$ का प्रान्त है : **[AIEEE 2011]**

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(0, \infty)$
(C) $(-\infty, 0)$ (D) $(-\infty, \infty) - \{0\}$

Q.8 माना समुच्चय R में A तथा B दो अरिक्त समुच्चय है तथा f : A → B एक एकैकी आच्छादी फलन है।

कथन-1 : f एक आच्छादी फलन है

कथन-2 : एक फलन g : B → A का अस्तित्व है, जिसके लिए $fog = I_B$ है। **[AIEEE Online -2012]**

(A) कथन-1 सही है, कथन-2 सही है, कथन-2 कथन-1 की सही व्याख्या है
(B) कथन-1 सही है, कथन-2 सही है, कथन-2 कथन-1 की सही व्याख्या नहीं है
(C) कथन-1 सही है, कथन-2 गलत है
(D) कथन-1 गलत है, कथन-2 सही है

Q.9 फलन $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in R$ का परिसर है : **[AIEEE Online -2012]**

(A) [–1, 1] (B) R (C) R – {0} (D) (–1, 1)

Q.10 माना दिये गये समुच्चय S के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय P(S) दर्शाता है, तो समुच्चय S = {1, 2, 3} से समुच्चय P(S) पर बनने वाले एकैकी फलनों की संख्या है : **[AIEEE Online -2012]**

(A) 24 (B) 8 (C) 336 (D) 320

Q.11 माना $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $R : A \to A$, $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$ के द्वारा परिभाषित सम्बन्ध है तब सही कथन है - **[JEE Main Online -2013]**

(A) R कोई प्रतिलोम नहीं रखता है

(B) R एकैकी फलन नहीं है

(C) R एक आच्छादक फलन है

(D) R एक फलन नहीं है

Q.12 यदि $a \in R$ तथा समीकरण

$-3(x - [x])^2 + 2(x - [x]) + a^2 = 0$

(जहाँ [x] उस बड़े से बड़े पूर्णांक को दर्शाता है जो $\leq x$ है) का कोई पूर्णांकीय हल नहीं है, तो a के सभी संभव मान जिस अंतराल में स्थित हैं, वह है :

[JEE Main -2014]

(A) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ (B) $(-1, 0) \cup (0, 1)$

(C) $(1, 2)$ (D) $(-2, -1)$

Q.13 यदि $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$, $x \in R$ है, तो समीकरण $f(x) = 0$ का/के :

[JEE Main Online - 2014]

(A) कोई हल नहीं है (B) एक हल है

(C) दो हल है (D) दो से अधिक हल है

Q.14 माना f एक विषम फलन है जो कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ द्वारा परिभाषित है जहाँ $x \geq 0$ हैं, तो $x = -\frac{11\pi}{6}$ पर $f(x)$ बराबर है : **[JEE Main Online -2014]**

(A) $\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}$ (B) $-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}$

(C) $\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}$ (D) $-\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}$

Q.15 माना $f : R \to R$, $f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| + 1}$ द्वारा परिभाषित है, तो f **[JEE Main Online - 2014]**

(A) एकैकी तथा आच्छादी दोनों हैं।

(B) एकैकी है पर आच्छादी नहीं है।

(C) आच्छादी है पर एकैकी नही है।

(D) न तो एकैकी है और न ही आच्छादी है।

Q.16 माना $f(n) = \left[\frac{1}{3} + \frac{3n}{100}\right] n$, जहाँ [n] एक महत्तम पूर्णांक, जो n से छोटा अथवा बराबर है, तो $\sum_{n=1}^{56} f(n)$ बराबर है **[JEE Main Online - 2014]**

(A) 56 (B) 689 (C) 1287 (D) 1399

Q.17 फलन $f(x) = |\sin 4x| + |\cos 2x|$ एक आवर्ती फलन हैं जिसका आवर्त काल है **[JEE Main Online - 2014]**

(A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

Q.18 यदि $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, $x \neq 0$ तथा

$S = \{x \in R : f(x) = f(-x)\}$; तब S : **[JEE Main - 2016]**

(A) एक रिक्त समुच्चय है

(B) ठीक एक अवयव रखता है

(C) ठीक दो अवयव रखता है

(D) दो से अधिक अवयव रखता है

Q.19 $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ के लिए माना $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ तथा $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. है, तो $f_{100}(3) + f_1\left(\frac{2}{3}\right) + f_2\left(\frac{3}{2}\right)$ बराबर है - **[JEE Main Online -2016]**

(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

Q.20 फलन $f : R \to \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, जो $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ द्वारा परिभाषित है - **[JEE Main - 2017]**

(A) एकैकी है परन्तु आच्छादी नहीं है

(B) आच्छादक है परन्तु एकैकी नहीं है

(C) न तो आच्छादक और न ही एकैकी है

(D) व्युत्क्रमणीय है

Q.21 माना $f(x) = 2^{10}x + 1$ एवं $g(x) = 3^{10}x - 1$ है। यदि $(fog)(x) = x$ है, तब x बराबर होगा - **[JEE Main Online -2017]**

(A) $\frac{2^{10} - 1}{2^{10} - 3^{-10}}$ (B) $\frac{1 - 2^{-10}}{3^{10} - 2^{-10}}$

(C) $\frac{3^{10} - 1}{3^{10} - 2^{-10}}$ (D) $\frac{1 - 3^{-10}}{2^{10} - 3^{-10}}$

Q.22 फलन $f(x) = x - 5\left[\frac{x}{5}\right]$ जहाँ N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा [x] महत्तम पूर्णांक फलन को व्यक्त करता है, है - **[JEE Main Online -2017]**

(A) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं
(B) एकैकी तथा आच्छादक
(C) न तो एकैकी न ही आच्छादक
(D) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं

Q.23 माना फलन $f : A \to B$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ है जहाँ $A = R - \{2\}$ तथा $B = R - \{1\}$ है। तब f है **[JEE-Main Online-2018]**

(A) प्रतिलोमीय तथा $f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-1}$
(B) प्रतिलोमीय तथा $f^{-1}(y) = \frac{3y-1}{y-1}$
(C) प्रतिलोमीय नहीं
(D) प्रतिलोमीय तथा $f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{y-1}$

Q.24 माना $x \in R - \{0, 1\}$ के लिए, तीन फलन $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = 1 - x$ तथा $f_3(x) = \frac{1}{1-x}$ दिये गये हैं। यदि एक फलन J(x), $(f_2 \circ J \circ f_1)(x) = f_3(x)$ को सन्तुष्ट करता है, तो J(x) बराबर है : **[JEE Main - 2019]**

(A) $\frac{1}{x}f_3(x)$ (B) $f_2(x)$ (C) $f_3(x)$ (D) $f_1(x)$

Q.25 माना $A = \{x \in R : x$ एक धन पूर्णांक नहीं है$\}$
एक फलन $f : A \to R$ निम्न प्रकार से परिभाषित है :
$f(x) = \frac{2x}{x-1}$, तो f एक : **[JEE Main - 2019]**

(A) एकैकी फलन नहीं है।
(B) आच्छादक है, परन्तु एकैकी फलन नहीं है।
(C) एकैकी है, परन्तु आच्छादक फलन नहीं है।
(D) न एकैकी है और न आच्छादक फलन है।

Q.26 माना N प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है तथा दो फलन f और g निम्न इस प्रकार परिभाषित है :
$f, g : N \to N$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & ; \text{ यदि n विषम है} \\ \frac{n}{2} & ; \text{ यदि n सम है} \end{cases} \quad \text{तथा}$$

$g(n) = n - (-1)^n$; तो फलन fog **[JEE Main - 2019]**

(A) न तो एकैकी और न ही आच्छादक है
(B) आच्छादक है परन्तु एकैकी नहीं है
(C) एकैकी तथा आच्छादक दोनों है
(D) एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है

Q.27 माना $f : R \to R$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in R$ द्वारा परिभाषित किया गया है, तो f का परिसर है : **[JEE Main - 2019]**

(A) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $R - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
(C) $(-1, 1) - \{0\}$ (D) $R - [-1, 1]$

Q.28 माना $k = 1, 2, 3, \ldots$ के लिए
$f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x)$ है,
तो सभी $x \in R$ के लिए, $f_4(x) - f_6(x)$ का मान बराबर है : **[JEE Main - 2019]**

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{-1}{12}$ (D) $\frac{1}{12}$

Q.29 माना फलन $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$; $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$ द्वारा परिभाषित है, तो f : **[JEE Main - 2019]**

(A) आच्छादक है परन्तु एकैकी नहीं है
(B) न एकैकी है और न आच्छादक है
(C) केवल एकैकी है
(D) एकैकी आच्छादक दोनों है

Q.30 यदि $f(x) = \log_e\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $|x| < 1$ है, तब $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ बराबर है - **[JEE Main - 2019]**

(A) $2f(x)$ (B) $2f(x^2)$ (C) $(f(x))^2$ (D) $-2f(x)$

Q.31 माना $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ को $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ के रूप में लिखा गया है जबकि $f_1(x)$ एक सम फलन है और $f_2(x)$ एक विषम फलन है, तो $f_1(x + y) + f_1(x - y)$ बराबर है: **[JEE Main - 2019]**

(A) $2f_1(x + y) f_2(x - y)$ (B) $2f_1(x + y) f_1(x - y)$
(C) $2f_1(x) f_2(y)$ (D) $2f_1(x) f_1(y)$

Q.32 माना $\sum_{k=1}^{10} f(a + k) = 16(2^{10} - 1)$ है, जहाँ सभी प्राकृत संख्याओं x, y के लिए, फलन f, $f(x + y) = f(x)f(y)$ को संतुष्ट करता है तथा $f(1) = 2$ है, तो प्राकृत संख्या 'a' बराबर है **[JEE Main - 2019]**

(A) 2 (B) 3 (C) 16 (D) 4

Q.33 यदि फलन $f : R - \{1, -1\} \to A$ जो $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ के द्वारा परिभाषित किया जाता है, आच्छादक है, तब A बराबर है : **[JEE Main - 2019]**

(A) $R - \{-1\}$ (B) $R - [-1, 0)$

(C) $R - (-1, 0)$ (D) $[0, \infty)$

Q.34 फलन $f(x) = \frac{1}{4-x^2} + \log_{10}(x^3 - x)$ का प्रान्त है : **[JEE Main - 2019]**

(A) $(1, 2) \cup (2, \infty)$

(B) $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$

(C) $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

(D) $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$

Q.35 माना $f(x) = x^2$, $x \in R$ है। किसी भी $A \subseteq R$ के लिए $g(A) = \{x \in R : f(x) \in A\}$ है। यदि $S = [0, 4]$ है, तो निम्न में से कौन-सा एक कथन सही नहीं है ? **[JEE Main - 2019]**

(A) $g(f(S)) \neq S$ (B) $f(g(S)) = S$

(C) $f(g(S)) \neq f(S)$ (D) $g(f(S)) = g(S)$

Q.36 $x \in (0, 3/2)$ के लिए माना $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \tan x$ तथा $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ है। यदि $\phi(x) = ((hof)og)(x)$, तो $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ बराबर है : **[JEE Main - 2019]**

(A) $\tan\frac{7\pi}{12}$ (B) $\tan\frac{11\pi}{12}$

(C) $\tan\frac{\pi}{12}$ (D) $\tan\frac{5\pi}{12}$

Q.37 यदि $g(x) = x^2 + x - 1$ तथा $(gof)(x) = 4x^2 - 10x + 5$, तब $f\left(\frac{5}{4}\right)$ बराबर है : **[JEE Main - 2020]**

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Q.38 माना $f : R \to R$ एक फलन है जो $f(x + y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in R$ को संतुष्ट करता है। यदि $f(1) = 2$ तथा $g(n) = \sum_{k=1}^{(n-1)} f(k), n \in N$ तब n का मान जिसके लिए $g(n) = 20$, है : **[JEE Main - 2020]**

(A) 5 (B) 9 (C) 20 (D) 4

Q.39 माना $f : R \to R$, $f(x) = 2x - 1$ के द्वारा परिभाषित है तथा $g : R - \{1\} \to R$, $g(x) = \frac{x-\frac{1}{2}}{x-1}$ द्वारा परिभाषित है। तब सम्मिश्र फलन $f(g(x))$ है: **[JEE Main - 2021]**

(A) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं

(B) एकैकी तथा आच्छादक दोनों

(C) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं

(D) न तो एकैकी ना ही आच्छादक

Q.40 माना $A = \{2, 3, 4, 5, ... , 30\}$ तथा '$\simeq$' ; $A \times A$ पर एक तुल्य संबंध है, जो $(a, b) \simeq (c, d)$ द्वारा परिभाषित है, यदि और केवल यदि $ad = bc$. तब क्रमित युग्मों की संख्या जो इस तुल्य संबंध को क्रमित युग्म (4, 3) के साथ संतुष्ट करता है, बराबर है : **[JEE Main - 2021]**

(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 7

Q.41 माना $f : R - \{3\} \to R - \{1\}$; $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित है। माना $g : R \to R$; $g(x) = 2x - 3$ द्वारा दिया जाता है। तब, x के सभी मानों का योग जिनके लिए $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{13}{2}$ बराबर है **[JEE Main - 2021]**

(A) 7 (B) 2 (3) 5 (4) 3

Q.42 माना एक फलन $f : N \to R$ इस प्रकार है कि $f(x + y) = 2f(x) f(y)$, प्राकृत संख्याओं x तथा y के लिए है। यदि $f(1) = 2$ तब α का मान जिसके लिए $\sum_{k=1}^{10} f(\alpha + k) = \frac{512}{3}(2^{20} - 1)$ सत्य है, है : **[JEE Main-2022]**

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

Q.43 माना $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \in R - \{0, -1, 1\}$ है। यदि $f^{n+1}(x) = f(f^{n}(x))$ सभी $n \in N$ के लिए, तब $f^6(6) = f^7(7)$ बराबर है **[JEE Main-2022]**

(A) $\frac{7}{6}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $-\frac{11}{12}$

Q.44 माना $f : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = x - 1$ तथा $g : R - \{1, -1\} \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $g(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$. तब फलन fog है : **[JEE Main-2022]**

(A) एकैकी परन्तु अच्छादक नहीं
(B) अच्छादक परन्तु एकैकी नहीं
(C) एकैकी तथा अच्छादक दोनों
(D) न तो एकैकी ना ही अच्छादक

Q.45 माना एक फलन $f : N \to N$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n = 2,4,6,8.... \\ n-1, & n = 3,7,11,15.... \\ \dfrac{n+1}{2} & n = 1,5,9,13.... \end{cases}$$

तब, f है **[JEE Main-2022]**
(A) एकैकी परन्तु अच्छादक नहीं
(B) अच्छादक परन्तु एकैकी नहीं
(C) न तो एकैकी ना ही अच्छादक
(D) एकैकी तथा अच्छादक दोनों

Q.46 माना $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ में एक सतत् फलन इस प्रकार है कि $f(3x) - f(x) = x$. यदि $f(8) = 7$, तब $f(14)$ बराबर है **[JEE Main-2022]**
(A) 4 (B) 10 (C) 11 (D) 16

Q.47 माना $f(x)$ तथा $g(x)$ क्रमशः 2 तथा 1 घात के दो वास्तविक बहुपद हैं। यदि $f(g(x)) = 8x^2 - 2x$ तथा $g(f(x)) = 4x^2 + 6x + 1$ है, तब $f(2) + g(2)$ का मान है _____. **[JEE Main-2022]**

Q.48 फलनों f की संख्या, जो समुच्चय $A = \{x \in N : x^2 - 10x + 9 \le 0\}$ से समुच्चय $B = \{n^2 : n \in N\}$ में इस प्रकार परिभाषित है, कि प्रत्येक $x \in A$ के लिए $f(x) \le (x-3)^2 + 1$ हो, है _____. **[JEE Main-2022]**

Q.49 यदि $f(x) = \dfrac{2^{2x}}{2^{2x}+2}$, $x \in R$, तो $f\left(\dfrac{1}{2023}\right) + f\left(\dfrac{2}{2023}\right) + ... + f\left(\dfrac{2022}{2023}\right)$ बराबर है– **[JEE Main-2023]**
(1) 1010 (2) 2011 (3) 1011 (4) 2010

Q.50 मान लीजिऐ $f(x)$ एक फलन इस प्रकार है कि $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$,$\forall x, y \in N$. यदि $f(1) = 3$ और $\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3279$, तब n का मान है–
[JEE Main-2023]
(A) 8 (B) 9 (C) 6 (D) 7

Q.51 मान लीजिऐ f, g और h वास्तविक विद्यमान फलन है जिन्हे R के रूप में परिभावित किया गया है।

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x)\begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{(x+1)}, & x \ne -1 \\ 1, & x = -1 \end{cases}$$

और $h(x) = 2[x] - f(x)$, जहाँ $[x]$ सबसे बड़ा पूर्णांक $\le x$ है तो $\lim\limits_{x \to 1} g(h(x-1))$ का मान है–
[JEE Main-2023]
(A) 1 (B) –1 (C) sin(1) (D) 0

Q.52 मान लीजिऐ $f : (0, 1) \to R$ एक फलन है जो $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$, और $g(x) = (f(-x) - f(x))$. द्वारा परिभाषित है।
दो कथनो पर विचार करे
(I) g (0, 1) में एक वर्धमान फलन है
(II) g (0, 1) में एकैकी है। **[JEE Main-2023]**
(A) केवल (I) सही है। (B) (I) और (II) दोनो सही है।
(C) केवल (II) सही है। (D) न तो (I) ना हि (II) सही है।

Q.53 मान लीजिऐ $f : R - \{0, 1\} \to$ एक फलन इस प्रकार है कि $f(x) + f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = 1 + x$. तो $f(2)$ बराबर है। **[JEE Main-2023]**
(A) $\dfrac{9}{2}$ (B) $\dfrac{9}{4}$ (C) $\dfrac{7}{3}$ (D) $\dfrac{7}{4}$

Q.54 फलन $f : N - \{1\} \to N$; f(n) द्वारा परिभाषित = n का उच्चतम अभाज्य गुणनखण्ड हैं, है– **[JEE Main-2024]**
(A) दोनों एकैकी व आच्छादक
(B) न तो एकैकी न ही आच्छादक
(C) केवल एकैकी
(D) केवल आच्छादक

Q.55 माना $f : R - \left\{\dfrac{-1}{2}\right\} \to R$ तथा $g : R - \left\{\dfrac{-5}{2}\right\} \to R$ को $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x+1}$ और $g(x) = \dfrac{|x|+1}{2x+5}$ के रूप मे परिभाषित किया गया है, तब फलन fog का प्रान्त है। **[JEE Main-2024]**
(A) R (B) $R - \left\{\dfrac{-5}{2}\right\}$
(C) $R - \left\{\dfrac{-7}{4}\right\}$ (D) $R - \left\{\dfrac{-5}{2}, \dfrac{-7}{4}\right\}$

Q.56 यदि $f(x)=\begin{cases}2+2x, -1\le x<0\\ 1-\frac{x}{3}, \ 0\le x\le 3\end{cases}$;

$g(x)=\begin{cases}-x, -3\le x\le 0\\ x, \ 0<x\le 1\end{cases}$, तो (fog) (x) का परिसर है–

[JEE Main-2024]

(A) [0, 1] (B) (0, 1] (C) [0, 1) (D) [0, 3)

Q.57 माना की फलन $f(x)=\frac{2x^2-3x+8}{2x^2+3x+8}$ के अधिकतम और न्यूनतम मानों का योग $\frac{m}{n}$ है जहाँ gcd(m, n) = 1 है। तब $m+n$ बराबर है। **[JEE Main-2024]**

(A) 182 (B) 217 (C) 195 (D) 201

Q.58 माना $f(x)=3\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ एक वास्तविक मान वाला फलन है। यदि α और β क्रमश: f के न्यूनतम और अधिकतम मान है, तो $\alpha^2+2\beta^2$ बराबर है।

[JEE Main-2024]

(A) 44 (B) 42 (C) 24 (D) 38

Q.59 माना A = {1, 2, 3, 4} तथा B = {1, 4, 9, 16} है | तब बहुएकैकी फलनों f: A $\to$ B की संख्या इस प्रकार हैं कि $1 \in f(A)$ बराबर हैं : **[JEE Main-2025]**

(A) 127 (B) 151 (C) 163 (D) 139

Q.60 माना $f(x)=\log_e x$ तथा $g(x)=\frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}{2x^2-2x+1}$ है। तब fog का प्रान्त हैं। **[JEE Main-2025]**

(A) $\mathbb{R}$ (B) $(0, \infty)$ (C) $[0, \infty)$ (D) $[1, \infty)$

Q.61 यदि फलन $f(x)=\log_7(1-\log_4(x^2-9x+18))$ का प्रान्त $(\alpha, \beta)\cup(\gamma, \delta)$ है, तब $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ बराबर हैं–

[JEE Main-2025]

(A) 17 (B) 18 (C) 15 (D) 16

Q.62 यदि फलन $f(x)=\frac{5-x}{x^2-3x+2}$, $x\ne 1, 2$, का परिसर $(-\infty. \alpha]\cup[\beta, \infty)$ हैं, तब $\alpha^2+\beta^2$ बराबर हैं :

[JEE Main-2025]

(A) 194 (B) 192 (C) 188 (D) 190

Q.63 ऐसे फलनों $f : \{1, 2, \ldots, 100\} \to \{0, 1\}$ की संख्या जो 98 से कम या उसके बराबर धनात्मक पूर्णांक में से किसी एक को 1 निर्दिष्ट करते हैं, _____के बराबर हैं– **[JEE Main-2025]**

Exercise (Level) 4

Part-A : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार के प्रश्न

Q.1 यदि $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ है, तो D_{f+g} में समाहित है -

(A) $(-3, -1)$ (B) $[1, 3)$

(C) $[-3, 3]$ (D) $\{0\} \cup [1, 3)$

Q.2 यदि $f(x) = \frac{3x-1}{3x^3 + 2x^2 - x}$ तथा $S = \{x | f(x) > 0\}$ तब S निम्न को समाहित करता है -

(A) $(-\infty, -2)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, 5\right)$

(C) $(-\infty, -1)$ (D) $(0, \infty) - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Q.3 यदि D फलन $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\sin^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right)$ का प्रान्त है तब D निम्न को समाहित करता है -

(A) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$

(C) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ (D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Q.4 माना $A = R - \{2\}$ तथा $B = R - \{1\}$ है।

माना $f : A \to B$, $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ द्वारा परिभाषित है तब -

(A) f एकैकी है (B) f आच्छादक है

(C) f एकैकी आच्छादक है (D) इनमें से कोई नहीं

Q.5 यदि $F(x) = \frac{\sin \pi[x]}{\{x\}}$ है, तो F(x)

(A) मूल आवर्तनांक 1 के सापेक्ष आवर्ती होगा

(B) सम होगा

(C) का परिसर एकक होगा

(D) $\text{sgn}\left(\text{sgn}\frac{\{x\}}{\sqrt{\{x\}}}\right) - 1$ के समरूप है, जहाँ $\{x\}$ फलन के भिन्नात्मक भाग को निरूपित करता है तथा [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है और sgn (x) एक सिग्नम फलन है।

Q.6 निम्न में $f : [-1, 1] \to [0, 2]$ द्वारा परिभाषित कौनसा रैखिक फलन आच्छादक है -

(A) $1 - x$ (B) $1 + x$ (C) $x - 1$ (D) $x + 2$

Q.7 $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ के द्वारा परिभाषित कौनसा फलन एकैकी आच्छादक नहीं है :

(A) $\sin(\sin^{-1}x)$ (B) $\frac{2}{\pi}\sin^{-1}(\sin x)$

(C) $(\text{sgn } x)\, \ell n\, e^x$ (D) $x^3 \text{ sgn } x$

Q.8 निम्न में से कौनसा फलन आवर्ती है ?

(A) $\text{sgn}(e^{-x})$

(B) $\sin x + |\sin x|$

(C) $\min(\sin x, |x|)$

(D) $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x - \frac{1}{2}\right] + 2[-x]$

जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन है

Q.9 यदि $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \le 1 \\ a^2x + 1 & x > 1 \end{cases}$ तब 'a' के मान जिनके लिए f(x) एकैकी है, होंगे

(A) –3 (B) 3 (C) 0 (D) 1

Q.10 मानाकि फलन $y = f(x)$ प्रतिबन्ध $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ को सन्तुष्ट करता है, तब

(A) f(x) का प्रान्त R है

(B) f(x) का प्रान्त $R - (-2, 2)$ है

(C) f(x) का परिसर $[-2, \infty)$ है

(D) f(x) का परिसर $[2, \infty)$ है

Q.11 $2f(\sin x) + f(\cos x) = x$ को सन्तुष्ट करने वाले वास्तविक मानी फलन पर विचार कीजिए। तब

(A) f(x) का प्रान्त R है

(B) f(x) का प्रान्त $[-1, 1]$ है

(C) f(x) का परिसर $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ है

(D) f(x) का परिसर R है

Q.12 माना $f(x) = x^2 - 2ax + a(a+1)$, $f : [a, \infty) \to [a, \infty)$ है। यदि समीकरण $f(x) = f^{-1}(x)$ का एक हल 5049 है, तब अन्य हल हो सकते हैं -

(A) 5051 (B) 5048
(C) 5052 (D) 5050

Q.13 यदि $f : R^+ \to R^+$ एक बहुपद फलन है जो फलन समीकरण $f(f(x)) = 6x - f(x)$ को सन्तुष्ट करता है, तब $f(17)$ बराबर है -

(A) 17 (B) –51
(C) 34 (D) –34

Q.14 $f : R \to [-1, \infty)$ तथा $f(x) = \ell n([|\sin 2x| + |\cos 2x|])$ (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है)

(A) f(x) का परिसर Z है
(B) f(x) आवर्ती है जिसका मुख्य आवर्तनांक $\pi/4$ है।
(C) f(x) अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ में व्युत्क्रमणीय है
(D) f(x) अन्तर्क्षेपी फलन है

Q.15 माना $f(x) = \text{sgn}(\cot^{-1}x) + \tan\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$, जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन है, तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सत्य है ?

(A) f(x) बहुएकैकी है परन्तु समफलन नहीं है
(B) f(x) आवर्ती फलन है
(C) f(x) परिबद्ध फलन है
(D) f(x) का ग्राफ x-अक्ष से ऊपर रहता है

Q.16 माना $f : R \to R$, $f(x) = \max(1 + |x|, 2 - |x|)$ के द्वारा परिभाषित है, तब निम्न में से कौनसा/से सत्य है ?

(A) f आवर्ती फलन है
(B) f ना तो एकैकी है और ना ही आच्छादक
(C) f सम फलन है
(D) f का परिसर $= \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

Q.17 निम्न में से कौनसा/से फलन युग्म समान ग्राफ रखते है?

(A) $f(x) = \frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cot x}$, $g(x) = \frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\text{cosec}\, x}$
(B) $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 4x + 5)$,
$g(x) = \text{sgn}\left(\cos^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$ जहाँ sgn सिग्नम फलन को व्यक्त करता है
(C) $f(x) = e^{\ell n(x^2+3x+3)}$, $g(x) = x^2 + 3x + 3$
(D) $f(x) = \frac{\sin x}{\sec x} + \frac{\cos x}{\text{cosec}\, x}$, $g(x) = \frac{2\cos^2 x}{\cot x}$

Q.18 माना f अचर फलन है जिसका प्रान्त R है तथा g एक निश्चित फलन है जिसका प्राप्त R है। किसी वास्तविक संख्या a के लिए f में दो क्रमित युग्म $(4, a^2 - 5)$ एवं $(2, 4a - 9)$ है तथा $\frac{f}{g}$ का प्रान्त $R - \{7\}$ है, तब -

(A) $a = 2$ (B) $(f(10))^{100} = 1$
(C) $(100)^{g(7)} = 1$ (D) $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

Part-B : कथन व कारण प्रकार के प्रश्न

निम्न प्रश्नों 19 से 22 तक प्रत्येक के साथ दो वाक्य दिये गये हैं जिन्हें कथन व कारण के रूप में लिखा गया है इनका उत्तर देते समय आपको निम्न चार विकल्पों में से किसी एक को चुनना है-

(A) यदि दोनों कथन व कारण सत्य हैं तथा कथन, कारण का सही स्पष्टीकरण है।
(B) यदि दोनों कथन व कारण सत्य है परन्तु कथन, कारण का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) यदि कथन सत्य है परन्तु कारण असत्य है
(D) यदि कथन असत्य है परन्तु कारण सत्य है

Q.19 **कथन :** फलन $f(x) = \sin x + \{x\}$, 2π आवर्तनांक के साथ आवर्ती है ।
कारण : $\sin x$ व $\{x\}$ दोनों क्रमशः 2π व 1 आवर्तनांक के साथ आवर्ती है।

Q.20 **कथन :** यदि f(x) तथा g(x) दोनों एकैकी है, तो $f(g(x))$ भी एकैकी होगा।
कारण : यदि $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ तब f(x) एकैकी होगा।

Q.21 **कथन :** माना $f : [0, 3] \to [1, 13]$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x) = x^2 + x + 1$ है तो इसका प्रतिलोम फलन $f^{-1}(x) = \frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}$ है।
कारण : बहुएकैकी फलन का प्रतिलोम विद्यमान नहीं होता।

Q.22 **कथन :** $\cos x + \cot x$ का मूल आवर्तनांक 2π है।
कारण : यदि f(x) का आवर्तनांक T_1 है तथा g(x) का आवर्तनांक T_2 है, तब f(x) + g(x) का मूल आवर्तनांक, T_1 व T_2 का ल.स.प. होगा।

Part-C : स्तम्भ सुमेलन प्रश्न

स्तम्भ 1 में दी गई प्रविष्टि का स्तम्भ 2 में दी गई सही प्रविष्टि से मिलान कीजिए -

Q.23

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
(A) $\sqrt{[\sin 2x]-[\cos 2x]}$ का परिसर है	(P) {1, 2, 3}
(B) $\sqrt{{}^{x^2+4x}C_{2x^2+3}}$ का प्रान्त है	(Q) {1}
(C) $\sqrt{\log(\cos(\sin x))}$ का परिसर है	(R) {0, 1}
(D) [|sinx| + |cos x|] का परिसर है	(S) {0}

(जहाँ [·] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है)

Q.24 स्तम्भ मिलान कीजिए।

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
(A) $\frac{1}{2}\left\{\frac{\lvert\sin x\rvert}{\cos x}+\frac{\lvert\cos x\rvert}{\sin x}\right\}$ का आवर्तनांक है	(P) 2
(B) $\cos^{-1}\sqrt{\log_{[x]}\frac{\lvert x\rvert}{x}}$ का परिसर है	(Q) 2π
(C) $x^2-4-[x]=0$ के कुल हलों की संख्या है	(R) 1
(D) $e^{\cos^4\pi x+x-[x]+\cos^2\pi x}$ का मूलभूत आवर्तनांक है	(S) $\frac{\pi}{2}$

(जहाँ [·] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है)

Q.25 स्तम्भ मिलान कीजिए।

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
(A) $f(x)=\sqrt{2^x-3^x}+\log_3\log_{1/2}x$ का प्रान्त है	(P) [0, 1]
(B) $2\cos^2\frac{x}{2}\sin^2x=x^2+\frac{1}{x^2}$ का हल समुच्चय है	(Q) $[0,\infty)$
(C) यदि $A=\{(x,y);\ y=1/x, x\in R_0\}$ तथा $B=\{(x,y); y=-x, x\in R\}$ तब $A\cap B$ है	(R) $[1,\infty)$
(D) फलन $f(x)=\sqrt{x}\ \sqrt{x-1}$ तथा $\phi(x)=\sqrt{x^2-x}$ किसमें समरूप हैं	(S) ϕ

Q.26 स्तम्भ मिलान कीजिए।

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
(A) फलन $y=\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin 5\pi t$ का मूलभूत आवर्तनांक है	(P) $\frac{1}{2}$
(B) $y=\{\sin(\pi x)\}$, $x\in(0,a)$ के लिए एक बहुएकैकी फलन है, जहाँ {} भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता हो तो a होगा	(Q) 8
(C) $y=\frac{1}{2}\left(\frac{\lvert\sin(\pi/4)x\rvert}{\cos(\pi/4)x}+\frac{\sin(\pi/4)x}{\lvert\cos(\pi/4)x\rvert}\right)$ का मूल आवर्तनांक होगा	(R) 2
(D) यदि $f:[0,2]\to[0,2]$ के द्वारा परिभाषित फलन $f(x)=ax^2+bx+c$; a, b, c अशून्य वास्तविक संख्याऐं हों तथा f(x) एकैकी आच्छादक फलन है तो f(2) बराबर है	(S) 0

Part-D : गद्यांश पर आधारित वस्तुनिष्ठ प्रश्न

गद्यांश # 1 (Q. 27 से 29)

माना $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=f(|x|)$
$h(x)=|g(x)|$ तथा $I(x)=|g(x)|-[x]$
चार फलन हैं, जहाँ [x] वास्तविक x का पूर्णांक भाग है।

Q.27 'a' का वह मान ज्ञात कीजिए जबकि समीकरण $g(x)-a=0$ के ठीक 3 वास्तविक मूल हों -

(A) 2 (B) 1
(C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

Q.28 'b' के उन मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जबकि $h(x)-b=0$ के ठीक 8 वास्तविक हल हों -

(A) $b\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ (B) $b\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$
(C) $b\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Q.29 I (x) = 0 के लिए निम्न में से कौनसा कथन सही है -

(A) I(x) = 0, x के दो मानों के लिए संतुष्ट होती है
(B) I(x) = 0, x के एक मान के लिए संतुष्ट होती है जो 1 से 2 के मध्य विद्यमान है
(C) I(x) = 0 को x का एक मान संतुष्ट करता है जो कि 3 से 4 के मध्य विद्यमान है
(D) इनमें से कोई नहीं

गद्यांश # 2 (Q.30 से 32)

यदि $f(x) = 0$; यदि $x \in Q$
$= 1$; यदि $x \notin Q$
तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए-

Q.30 फलन $f(x)$ है -
(A) एक सम फलन
(B) एक विषम फलन
(C) ना तो सम फलन है ना ही विषम फलन
(D) एकैकी फलन

Q.31 फलन $f(f(x))$ है -
(A) एक अचर फलन (B) एक सम फलन
(C) एक विषम फलन (D) बहुएकैकी फलन

Q.32 $g(x) = \ln(\text{sgn } f(x))$ का प्रान्त है -
(A) R
(B) सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय
(C) सभी अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय
(D) R^+

गद्यांश # 3 (Q. 33 से 35)

फलन $f(x) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}; & \text{यदि } x \notin I \\ 0 \quad ; & \text{यदि } x \in I \end{cases}$

के सन्दर्भ में जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है। यदि $g(x) = \max.\{x^2, f(x), |x|\}$; $-2 \le x \le 2$ तो -

Q.33 $f(x)$ का परिसर है -
(A) $[0, 1)$ (B) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
(C) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Q.34 $f(x)$
(A) अनावर्ती है
(B) आवर्ती है तथा इसका मूलभूत आवर्तनांक 1 है
(C) आवर्ती है तथा इसका मूलभूत आवर्तनांक 2 है
(D) आवर्ती है तथा इसका मूलभूत आवर्तनांक 1/2 है

Q.35 a के मानों का समुच्चय, यदि $g(x) = a$ तीन वास्तविक तथा भिन्न हल रखता है, होगा -
(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
(C) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $(0, 1)$

गद्यांश # 4 (Q. 36 से 38)

फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x \le 1 \\ \ell nx, & 1 < x \le e \end{cases}$ पर विचार करो।

मानाकि $f_1(x) = f(|x|)$
$f_2(x) = |f(|x|)|$
$f_3(x) = f(-x)$

Q.36 समीकरण $2f_2(x) - 1 = 0$ के धनात्मक हलों की संख्या है-
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

Q.37 समीकरण $f_1(x) = f_2(x)$ के पूर्णांक हलों की संख्या है -
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Q.38 यदि $f_4(x) = \log_{27}(f_3(x) + 2)$, तो $f_4(x)$ का परिसर है-
(A) $[1, 9]$ (B) $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$
(C) $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ (D) $[1, 27]$

Part-E : आंकिक उत्तर प्रकार के प्रश्न

Q.39 माना $f(x) = \left[\frac{1}{\cos\{x\}}\right]$ जहाँ [y] एवं {y} क्रमशः महत्तम पूर्णांक एवं भिन्नात्मक भाग फलन को व्यक्त करता है तथा $g(x) = 2x^2 - 3x(k + 1) + k(3k + 1)$ है। यदि $g(f(x)) < 0 \ \forall \ x \in R$, तब k के पूर्णांक मानों की संख्या ज्ञात करो।

Q.40 यदि $x = \log_4\left(\frac{2f(x)}{1 - f(x)}\right)$,
तब $(f(2010) + f(-2009))$ का मान ज्ञात करो।

Q.41 यदि M एवं m क्रमशः $f(\theta) = 5\sin^2\theta - 8\sin\theta + 4$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ का अधिकतम एवं न्यूनतम मान है, तब $(2Mm)$ का मान ज्ञात करो।

Q.42 माना फलन f इस प्रकार है कि
$4f(x^{-1} + 1) + 8f(x + 1) = \log_{12}x$ है, तब
$4(f(10) + f(13) + f(17))$ का मान ज्ञात करो।

Q.43 माना f वास्तविक मानी व्युत्क्रमणीय फलन इस प्रकार है कि $f\left(\frac{2x - 3}{x - 2}\right) = 5x - 2$, $x \ne 2$ है। $f^{-1}(13)$ का मान ज्ञात करो।

Part-F : विषय परख प्रकार के प्रश्न

Q.44 निम्न फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए :

(जहाँ [*] तथा {*} क्रमशः महत्तम पूर्णांक तथा भिन्नात्मक भाग फलन को प्रदर्शित करते हैं)

(i) $f(x) = \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{16 - x^2}$

(ii) $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 \log_2 (2x^3 + 5x^2 - 14x)$

(iii) $f(x) = \ell n \left(\sqrt{x^2 - 5x - 24} - x - 2 \right)$

(iv) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - 5^x}{7^{-x} - 7}}$

(v) $y = \log_{10} \sin (x - 3) + \sqrt{16 - x^2}$

(vi) $f(x) = \log_{100x} \left(\dfrac{2 \log_{10} x + 1}{-x} \right)$

(vii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 - 1}} + \ell n\, x\, (x^2 - 1)$

(viii) $f(x) = \sqrt{\log_{1/2} \dfrac{x}{x^2 - 1}}$

(ix) $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|} + \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

(x) $f(x) = \sqrt{\log_x (\cos 2\pi x)}$

(xi) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x - (1/2)}}{\sqrt{6 + 35x - 6x^2}}$

(xii) $f(x) = \sqrt{\log_{1/3} (\log_4 ([x]^2 - 5))}$

(xiii) $f(x) = \dfrac{[x]}{2x - [x]}$

(xiv) $f(x) = \log_x \sin x$

(xv) $f(x) = \log_{\left[x + \frac{1}{x}\right]} |x^2 - x - 6| + {}^{16-x}C_{2x-1} + {}^{20-3x}P_{2x-5}$

Q.45 निम्न फलनों के प्रान्त एवं परिसर ज्ञात कीजिए.

(चिन्ह [*] एवं {*} को क्रमशः महत्तम पूर्णांक एवं भिन्नात्मक भाग फलन के रूप में समझें)

(i) $y = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 3)$

(ii) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

(iv) $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

(v) $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{1 + x}$

(vi) $f(x) = \log_{(\text{cosec } x - 1)} (2 - [\sin x] - [\sin x]^2)$

(vii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}$

(viii) $\cot^{-1} (2x - x^2)$.

(ix) $f(x) = \log_2 (\sqrt{x - 4} + \sqrt{6 - x})$

Q.46 (a) निम्न फलनों के ग्राफ बनाईये, जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

(i) $f(x) = x + [x]$

(ii) $y = (x)^{[x]}$ जहाँ $x = [x] + (x)$

एवं $x > 0$ तथा $x \le 3$

(iii) $y = \text{sgn } [x]$

(iv) $\text{sgn } (x - |x|)$

(b) निम्न फलन युग्मों में से समरूप पहचानिये?

(जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन तथा {x} भिन्नात्मक भाग फलन को प्रदर्शित करता है)

(i) $f(x) = \text{sgn } (x^2 - 3x + 4)$ एवं $g(x) = e^{[\{x\}]}$

(ii) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$ एवं $g(x) = \tan x$

(iii) $f(x) = \ell n(1 + x) + \ell n(1 - x)$ एवं

$g(x) = \ell n\, (1 - x^2)$

(iv) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ एवं $g(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

Q.47 मानाकि f ऐसा फलन है जो कि $2f(xy) = \{f(x)\}^y + \{f(y)\}^x$ व $f(1) = k \ne 1$ को संतुष्ट करता है। सिद्ध करो कि

$$(k - 1) \sum_{n=1}^{n} F(n) = k^{n+1} - k$$

Q.48 वे सभी फलन f ज्ञात कीजिए जो सम्बन्ध $f(x) + f\left(\dfrac{1}{1 - x}\right) = \dfrac{2(1 - 2x)}{x(1 - x)}$ को संतुष्ट करते हैं, जहाँ x वास्तविक संख्या है, $x \ne 0, x \ne 1$.

Q.49 माना {x} तथा [x] क्रमशः एक वास्तविक संख्या x के भिन्नात्मक तथा पूर्णांक भाग को व्यक्त करते हैं, तब $4\{x\} = x + [x]$ को हल कीजिए।

Q.50 माना $f(x) = x^2 + kx$; k एक वास्तविक संख्या है। k के उन मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $f(x) = 0$ एवं $f(f(x)) = 0$ एक समान वास्तविक हल समुच्चय रखती है।

Q.51 मानाकि f(x) अन्तराल [–2, 2] में परिभाषित है एवं

$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \le x \le 0 \\ x-1 & 0 < x \le 2 \end{cases}$ तथा

$g(x) = f(|x|) + |f(x)|$ तो g(x) ज्ञात कीजिए।

Q.52 समीकरण $|2x - 1| = 3[x] + 2\{x\}$ को हल कीजिए जहाँ [·] व {·} क्रमशः महत्तम पूर्णांक फलन व भिन्नात्मक भाग फलन को प्रदर्शित करते हैं।

Q.53 माना $f(x) = \begin{cases} 3^{x-1} + \frac{8}{3}, & 0 \le x \le 2 \text{ के लिए} \\ 7 + \log_2(x-2), & 2 < x \le 4 \text{ के लिए} \\ x^2 - 9x + 21, & 4 < x \le 6 \text{ के लिए} \end{cases}$

एक समुच्चय 'B', A के अवयवों के 'f' प्रतिबिम्बों का समुच्चय है यदि B = {1, 3, 5, 7}, तब A ज्ञात कीजिए तथा इसका कारण स्पष्ट कीजिए कि फलन $f^{-1} : B \to A$ संभव है या नहीं ?

Q.54 यदि $f(x) \in [1, 2]$, जहाँ $x \in R$ एवं एक निश्चित वास्तविक संख्या p के लिए,

$f(x + p) = 1 + \sqrt{2f(x) - \{f(x)\}^2}$; $\forall\, x \in R$

है तो सिद्ध करो कि f(x) एक आवर्ती फलन है।

Q.55 यदि $f(a - x) = f(a + x)$ एवं $f(b - x) = f(b + x)$ सभी वास्तविक x के लिए जहाँ a, b(a > b) अचर हैं तो सिद्ध कीजिए कि f(x) आवर्ती फलन है।

Q.56 माना $f : R \to R$ एक फलन निम्न प्रकार परिभाषित है $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\, f(y)$; $\forall\, x, y \in R$ एवं $f(0) \neq 0$ तब सिद्ध कीजिए कि f(x) एक सम फलन है।

Q.57 मानाकि $f : [-2, 2] \to R$ एक फलन है एवं यदि $x \in [0, 2]$ के लिए

$$f(x) = \begin{cases} x \tan x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}[x], & \frac{\pi}{2} < x \le 2 \end{cases}$$

है तो f को $x \in [-2, 0]$ के लिए परिभाषित कीजिए जबकि

(i) f विषम फलन है

(ii) f सम फलन है

(जहाँ [·] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है)

Q.58 यदि $f(x) = -1 + |x - 2|$, $0 \le x < 4$ तथा $g(x) = 2 - |x|$, $-1 \le x \le 3$ है, तो fog (x), gof (x) fof (x) व gog (x) ज्ञात करो तथा fog (x) व gof (x) का लेखाचित्र बनाइये।

Q.59 यदि $f(x) = \ell n\,(x^2 - x + 2)$; $R^+ \to R$ में तथा

$g(x) = \{x\} + 1$; $[1, 2] \to [1, 2]$ में जहाँ {x}, x के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है तो सुपरिभाषित फलन f(g(x)) का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

Q.60 निम्न फलनों के सम या विषम होने की जांच कीजिए-

(i) $f(x) = \dfrac{(1 + 2^x)^7}{2^x}$

(ii) $f(x) = \dfrac{\sec x + x^2 - 9}{x \sin x}$

(iii) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2} + 1$

(iv) $f(x) = \begin{cases} x\,|\,x\,| & x \le -1 \\ [1 + x] + [1 - x] & -1 < x < 1 \\ -x\,|\,x\,| & x \ge 1 \end{cases}$

(v) $f(x) = \dfrac{2x(\sin x + \tan x)}{2\left[\frac{x + 2\pi}{\pi}\right] - 3}$

जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है।

Q.61 निम्न फलनों का आवर्तनांक ज्ञात करो

(i) $f(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{1+\cot x} - \frac{\cos^2 x}{1+\tan x}$

(ii) $f(x) = \tan\frac{\pi}{2}[x]$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है।

(iii) $f(x) = \ell og\,(2 + \cos 3x)$

(iv) $f(x) = e^{ln \sin x} + \tan^3 x - \text{cosec}\,(3x - 5)$

(v) $f(x) = \sin x + \tan\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2^2} + \sin\frac{x}{2^2} + \tan\frac{x}{2^3} .... + \sin\frac{x}{2^{n-1}} + \tan\frac{x}{2^n}$

(vi) $f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$

Q.62 फलन f, सभी $x, y \in R$ के लिए इस प्रकार परिभाषित है कि $f(1) = 2$; $f(2) = 8$ तथा $f(x + y) - kxy = f(x) + 2y^2$, जहाँ k नियतांक है तो f(x) ज्ञात कीजिए एवं प्रदर्शित कीजिए कि $x + y \neq 0$ के लिए $f(x + y).f\left(\frac{1}{x+y}\right) = k$

Q.63 माना p(x) एक बहुपद है जिसके गुणांक पूर्णांक है। p(x) को $x - 1$ से विभाजित करने पर शेषफल 1 आता है तथा p(x) को $x - 4$ से विभाजित करने पर शेषफल 10 आता है। यदि p(x) को $(x - 1)(x - 4)$ से विभाजित किया जाए तो शेषफल r(x) आता है तो r(2006) का मान ज्ञात कीजिए।

Exercise (Level) 5

OLD EXAMINATION QUESTIONS [JEE ADVANCED]

Q.1 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ x & x\notin Q\end{cases}$

तब (f – g) है - **[IIT Scr. 2005]**

(A) एकैकी, आच्छादक

(B) न तो एकैकी न ही आच्छादक

(C) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं

(D) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं

Q.2 यदि X व Y दो अरिक्त समुच्चय हैं जहाँ $f : X \to Y$ एक फलन इस प्रकार परिभाषित है कि

$f(C) = \{f(x): x \in C\}$; $C \subseteq X$ के लिए

एवं $f^{-1}(D) = \{x : f(x) \in D\}$; $D \subseteq Y$ के लिए

तब किन्हीं $A \subseteq X$ तथा $B \subseteq Y$ के लिए- **[IIT 2005]**

(A) $f^{-1}(f(A)) = A$

(B) $f^{-1}(f(A)) = A$ केवल यदि $f(X) = Y$

(C) $f(f^{-1}(B)) = B$ केवल यदि $B \subseteq f(x)$

(D) $f(f^{-1}(B)) = B$

Q.3 $2\sin t = \dfrac{1-2x+5x^2}{3x^2-2x-1}$; $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ के लिए t के मानों का परिसर होगा **[IIT 2005]**

Q.4 माना $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-5x+6}$ **[IIT-2007]**

स्तम्भ-I	**स्तम्भ -II**
(A) यदि $-1 < x < 1$, तब f(x) संतुष्ट करता है	(P) $0 < f(x) < 1$
(B) यदि $1 < x < 2$, तब f(x) संतुष्ट करता है	(Q) $f(x) < 0$
(C) यदि $3 < x < 5$, तब f(x) संतुष्ट करता है	(R) $f(x) > 0$
(D) यदि $x > 5$, तब f(x) संतुष्ट करता है	(S) $f(x) < 1$

Q.5 माना $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = \sin x$ सभी $x \in R$ के लिए तब उन सभी x का समुच्चय, जो $(f \circ g \circ g \circ f)(x) = (g \circ g \circ f)(x)$ को संतुष्ट करता है, जबकि $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ है, होगा **[IIT 2011]**

(A) $\pm\sqrt{n\pi}$, $n \in \{0, 1, 2...\}$

(B) $\pm\sqrt{n\pi}$, $n \in \{1, 2...\}$

(C) $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \{...., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

(D) $2n\pi$, $n \in \{...., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Q.6 फलन $f : [0, 3] \to [1, 29]$,

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ है **[IIT-2012]**

(A) एकैकी एवं आच्छादक

(B) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं

(C) एकैकी परन्तु आच्छादक

(D) ना तो एकैकी ना ही आच्छादक

Q.7 माना $f : (-1, 1) \to IR$ सभी $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ के लिए इस प्रकार है कि $f(\cos 4\theta) = \dfrac{2}{2-\sec^2\theta}$ है, तब $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ का मान है

MCQ **[IIT 2012]**

(A) $1-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (B) $1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

(C) $1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (D) $1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Q.8 माना कि $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to R$, जहाँ $f(x) = (\log(\sec x + \tan x))^3$ के द्वारा परिभाषित किया गया है। तब - **MCQ** **[IIT-Advance 2014]**

(A) f(x) विषम (odd) फलन है।

(B) f(x) एकैकी (one-one) फलन है।

(C) f(x) आच्छादक (onto) फलन है।

(D) f(x) सम (even) फलन है।

Q.9 माना कि सभी $x \in R$ के लिए $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)\right)$ और सभी $x \in R$ के लिए $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin x$ है। माना कि (f o g)(x) और (g o f)(x) क्रमशः f(g(x)) और g(f(x)) को दर्शाते हैं, तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) सही है (हैं)?

[IIT-Advance 2015]

(A) f का परिसर $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ है

(B) f o g का परिसर $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ है

(C) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pi}{6}$

(D) R में एक x ऐसा है जिसके लिए (g o f)(x) = 1

Q.10 माना कि समुच्चय X में ठीक 5 हैं और समुच्चय Y में ठीक 7 अवयव हैं। यदि X से Y में एकैकी फलनों की संख्या α है और Y से X में आच्छादक फलनों की संख्या β है, तब $\frac{1}{5!}(\beta-\alpha)$ का मान है _____ ।

[JEE Advanced -2018]

Q.11 माना कि $E_1=\left\{x\in R: x\neq 1 \text{ और } \frac{x}{x-1}>0\right\}$ और

$E_2=\left\{x\in E_1: \sin^{-1}\left(\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) \text{एक वास्तविक संख्या है}\right\}$

(यहाँ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन $\sin^{-1}x$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ में मान धारण करता है।)

माना कि फलन $f: E_1\to R$, $f(x)=\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)$ के द्वारा परिभाषित है और फलन

$g: E_2\to R$, $g(x)=\sin^{-1}\left(\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$ के द्वारा परिभाषित है। **[JEE Advanced -2018]**

सूची-I

(P) f का परिसर है

(Q) g के परिसर में समाहित है

(R) f के प्रान्त में समाहित है

(S) g का प्रान्त है

सूची-II

(1) $\left(-\infty,\frac{1}{1-e}\right]\cup\left[\frac{e}{e-1},\infty\right)$

(2) (0, 1)

(3) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(4) $(-\infty, 0)\cup(0,\infty)$

(5) $\left(-\infty,\frac{e}{e-1}\right]$

(6) $(-\infty, 0)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{e}{e-1}\right]$

दिए हुए विकल्पों में से सही विकल्प है :

(A) P → 4 ; Q → 2 ; R → 1 ; S → 1

(B) P → 3 ; Q → 3 ; R → 6 ; S → 5

(C) P → 4 ; Q → 2 ; R → 1 ; S → 6

(D) P → 4 ; Q → 3 ; R → 6 ; S → 5

Q.12 यदि फलन f : R → R ; f(x) = |x| (x – sin x) द्वारा परिभाषित है, तब निम्नलिखित में से **कौनसा** कथन सत्य है? **[IIT-Advance 2020]**

(A) f एकैकी है, लेकिन आच्छादक **नहीं**

(B) f आच्छादक है, लेकिन एकैकी **नहीं**

(C) f एकैकी तथा आच्छादक **दोनों** है

(D) f **न तो** एकैकी **ना ही** आच्छादक है

Q.13 माना f : [0, 2] → R एक फलन f(x) = (3 – sin2πx)) $\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(3\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$ द्वारा परिभाषित है। यदि $\alpha, \beta\in[0,2]$ इस प्रकार है, कि $\{x\in[0,2]: f(x)\geq 0\}=[\alpha,\beta]$, तब $\beta-\alpha$ का मान है–

[IIT-Advance 2020]

Q.14 माना फलन $f: [0,1]\to R$, $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ द्वारा परिभाषित है।

तब $f\left(\frac{1}{40}\right)+f\left(\frac{2}{40}\right)+f\left(\frac{3}{40}\right)+\ldots\ldots+f\left(\frac{39}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)0$

का मान है _____ . **[IIT-Advance 2020]**

Q.15 माना f : R → R निम्न प्रकार परिभाषित है

$f(x)=\frac{x^2-3x-6}{x^2+2x+4}$

तब निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / है?

[IIT-Advance 2021]

(A) f, अन्तराल (–2, –1) में ह्रासमान है

(B) f, अन्तराल (1, 2) में वर्धमान है

(C) f आच्छादक है

(D) f का परिसर $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ है

Q.16 मान लीजिए

$f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x)\ \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{17}{36}$ द्वारा परिभाषित फलन है। वर्ग क्षेत्र $S = [0,1] \times [0,1]$ पर विचार करें। मान लीजिए $G = \{(x, y) \in S : y > f(x)\}$ को हरा क्षेत्र और $R = \{(x, y) \in S : y < f(x)\}$ को लाल क्षेत्र कहा जाता है। मान लीजिए $L_h = \{(x, h) \in S : x \in [0,1]\}$ ऊंचाई $h \in [0, 1]$ पर क्षैतिज रेखा खींची गई। तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है (हैं) ? **[IIT-Advance 2023]**

(A) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल, रेखा L_h के नीचे हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।

(B) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल, रेखा L_h के नीचे लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।

(C) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल, रेखा L_h के नीचे लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।

(D) एक $h \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ इस प्रकार है कि रेखा L_h के ऊपर लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल रेखा L_h के नीचे हरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है।

Q.17 मान लीजिए $f : (0,1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{n}$ द्वारा परिभाषित है। यदि $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ जहाँ $n \in \mathbf{N}$, माना $g : (0,1) \to \mathbf{R}$ एक फलन इस प्रकार है कि $\int_{x^2}^{x} \sqrt{\frac{1-t}{t}}\ dt < g(x) < 2\sqrt{x}$, $\forall\ x \in (0,1)$ तो $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)$ **[IIT-Advance 2023]**

(A) विद्यमान नही है

(B) 1 के बराबर है

(C) 2 के बराबर है

(D) 3 के बराबर है

Q.18 मान लीजिए $n \geq 2$ एक प्राकृतिक संख्या है और $f : [0, 1] \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} n(1-2nx) & \text{यदि } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n(2nx-1) & \text{यदि } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{3}{4n} \\ 4n(1-nx) & \text{यदि } \frac{3}{4n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1}(nx-1) & \text{यदि } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है। यदि n इस प्रकार है कि वक्रों $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ तथा $y = f(x)$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 4 है तो फलन f का अधिकतम मान है – **[IIT-Advance 2023]**

Q.19 मान लीजिए $f : [1, \infty) \to R$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(1) = \frac{1}{3}$ तथा $3\int_1^x f(t)dt = xf(x) - \frac{x^3}{3}, x \in [1, \infty)$. मान लीजिए e प्राकृतिक लघुगुणक के आधार को दर्शाता है तो f(e) का मान है – **[IIT-Advance 2023]**

(A) $\frac{e^2+4}{3}$ (B) $\frac{\log_e 4 + e}{3}$

(C) $\frac{4e^2}{3}$ (D) $\frac{e^2-4}{3}$

Q.20 मान लीजिए f: $(0,1) \to R$ फलन परिभाषित है $f(x) = [4x]\left(x - \frac{1}{4}\right)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, जहाँ [x] x से कम या उसके बराबर अधिकतम पूर्णांक को दर्शाता है। तो निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है (हैं) ?

[IIT-Advance 2023]

(A) फलन f, (0, 1) में ठीक एक बिन्दु पर असंतत है।

(B) (0, 1) में ठीक एक बिन्दु जिस पर फलन f संतत लेकिन अवकलनीय नहीं है।

(C) फलन f, (0, 1) में तीन से अधिक बिन्दुओं पर अवकलनीय नही है।

(D) फलन f की न्युनतम मान $-\frac{1}{512}$ है।

Q.21 माना कि फलन $f : R \to R$ और $g : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x|x|\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$ और

$$g(x) = \begin{cases} 1-2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित हैं। माना कि $a, b, c, d \in R$ है। फलन $h : R \to R$ को

$$h(x) = af(x) + b\left(g(x) + g\left(\frac{1}{2} - x\right)\right) +$$

$c(x - g(x)) + d\, g(x)$, $x \in R$, द्वारा परिभाषित कीजिये।

सूची-I की प्रत्येक प्रविष्टि का **सूची-II** की सही प्रविष्टि से मिलान कीजिये।

सूची-I		**सूची-II**	
(P)	यदि $a = 0, b = 1, c = 0$, तथा $d = 0$ है, तब	(1)	h एकैकी है
(Q)	यदि $a = 1, b = 0, c = 0$, तथा $d = 0$ है, तब	(2)	h आच्छादी है
(R)	यदि $a = 0, b = 0, c = 1$, तथा $d = 0$ है, तब	(3)	h, R पर अवकलनीय है
(S)	यदि $a = 0, b = 0, c = 0$, तथा $d = 1$ है, तब	(4)	h का परिसर $[0, 1]$ है
		(5)	h का परिसर $\{0, 1\}$ है

सही विकल्प है **[JEE - Advanced 2024]**

(A) (P) → (4), (Q) → (3), (R) → (1), (S) → (2)
(B) (P) → (5), (Q) → (2), (R) → (4), (S) → (3)
(C) (P) → (5), (Q) → (3), (R) → (2), (S) → (4)
(D) (P) → (4), (Q) → (2), (R) → (1), (S) → (3)

Q.22 माना कि $f : R \to R$ एक फलन है, जो

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा **सत्य** है ? **[JEE - Advanced 2024]**

(A) अंतराल $\left[\frac{1}{10^{10}}, \infty\right)$ में $f(x) = 0$ के अनंत हल है।

(B) अंतराल $\left[\frac{1}{\pi}, \infty\right)$ में $f(x) = 0$ का कोई हल नहीं है।

(C) अंतराल $\left(0, \frac{1}{10^{10}}\right)$ में $f(x) = 0$ के हलों का समुच्चय परिमित है।

(D) अंतराल $\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\pi}\right)$ में $f(x) = 0$ के 25 से अधिक हल हैं।

Q.23 माना कि $f : R \to R$ एक ऐसा फलन है कि सभी $x, y \in R$ के लिए $f(x + y) = f(x) + f(y)$ है और $g : R \to (0, \infty)$ एक ऐसा फलन है कि सभी $x, y \in R$ के लिए $g(x + y) = g(x)\, g(y)$ है। यदि $f\left(\frac{-3}{5}\right) = 12$ और $g\left(\frac{-1}{3}\right) = 2$ है, तब $\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + g(-2) - 8\right)g(0)$ का मान _____ है। **[JEE - Advanced 2024]**

Q.24 माना कि फलन $f : [1, \infty) \to R$,

$$f(t) = \begin{cases} (-1)^{n+1}2, & \text{if } t = 2n-1, n \in N, \\ \frac{(2n+1-t)}{2}f(2n-1) + \frac{(t-(2n-1))}{2}f(2n+1), & \text{if } 2n-1 < t < 2n+1, n \in N. \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। $g(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x \in (1, \infty)$ से परिभाषित कीजिये। माना कि α, अंतराल $(1, 8]$ में समीकरण $g(x) = 0$ के हलों की संख्या को दर्शाता है और $\beta = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{g(x)}{x-1}$ है। तब $\alpha + \beta$ का मान _____ है। **[JEE - Advanced 2024]**

Q.25 मान लीजिए कि R सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) के समुच्चय (set) को दर्शाता है।

मान लीजिए कि $i \in \{1,2,3\}$ के लिए $a_i, b_i \in R$ हैं।

फलनों (functions) $f : R \to R$, $g : R \to R$, और $h : R \to R$ को

$f(x) = a_1 + 10x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4$,
$g(x) = b_1 + 3x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4$,
$h(x) = f(x + 1) - g(x + 2)$.

द्वारा परिभाषित कीजिए। यदि प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x) \neq g(x)$ है, तब $h(x)$ में x^3 का गुणांक (coefficient) है **[JEE - Advanced 2025]**

(A) 8 (B) 2
(C) – 4 (D) – 6

Q.26 मान लीजिए कि N सभी प्राकृत संख्याओं (natural numbers) के समुच्चय (set) को दर्शाता है, और Z सभी पूर्णाकों (integers) के समुच्चय को दर्शाता है। फलनों (functions) $f : N \to Z$ और $g : Z \to N$ जो

$$f(n) = \begin{cases} (n+1)/2 & \text{यदि } n \text{ विषम (odd) है,} \\ (4-n)/2 & \text{यदि } n \text{ सम (even) है} \end{cases} \quad \text{और}$$

$$g(n) = \begin{cases} 3+2n & \text{यदि } n \geq 0 \text{ है,} \\ -2n & \text{यदि } n < 0 \text{ है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, पर विचार कीजिए। सभी $n \in N$, के लिए $(g \circ f)(n) = f(g(n))$ और सभी $n \in Z$ के लिए $(f \circ g)(n) = f(g(n))$ परिभाषित कीजिए।

तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सत्य है (है) ? **[JEE - Advanced 2025]**

(A) $g \circ f$ एकैकी (one-one) नहीं है और $g \circ f$ आच्छादक (onto) भी नहीं है

(B) $f \circ g$ एकैकी (one-one) नहीं है परन्तु $f \circ g$ आच्छादक (onto) है

(C) g एकैकी (one-one) है और g आच्छादक (onto) भी है

(D) f एकैकी (one-one) नहीं है परन्तु f आच्छादक (onto) है

Q.27 मान लीजिए कि R सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) के समुच्चय (set) को दर्शाता है। मान लीजिए कि $f : R \to R$ एक इस प्रकार का फलन (function) है कि सभी $x \in R$ के लिए $f(x) > 0$ है, और सभी $x, y \in R$ के लिए $f(x + y) = f(x)f(y)$ है।

मान लीजिए कि वास्तविक संख्याएँ $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ एक समांतर श्रेणी (arithmetic progression) मे है। यदि $f(a_{31}) = 64f(a_{25})$ है, और $\sum_{i=1}^{50} f(a_i) = 3(2^{25} + 1)$, है, तब $\sum_{i=6}^{30} f(a_i)$ का मान _____ है।

[JEE - Advanced 2025]

Exercise (Level) 6

REVIEW EXERCISE

Q.1 प्राकृत संख्या 'a' ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\sum_{k=1}^{n} f(a+k) = 16(2^n - 1)$, जहाँ फलन 'f' सभी प्राकृत संख्याओं x, y के लिए सम्बन्ध f(x + y) = f(x) f(y) को संतुष्ट करता है, तथा f(1) = 2. **[IIT-1992]**

Q.2 एक फलन f : R → R, जहाँ R, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, जो निम्न प्रकार परिभाषित है-

$f(x) = \frac{\alpha x^2 + 6x - 8}{\alpha + 6x - 8x^2}$; α के मानों का अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनके लिए f(x) आच्छादक हो; क्या α = 3 के लिए फलन एकैकी है आपका उत्तर जाँचिये?

[IIT 1996]

Q.3 माना कि $f(x) = [x] \sin\left(\frac{\pi}{[x+1]}\right)$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है तो f का प्रान्त ज्ञात कीजिए। **[IIT 1996]**

Q.4 यदि f एक सम फलन है जो अन्तराल(–5, 5) में परिभाषित है, तब समीकरण $f(x) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ को संतुष्ट करने वाले x के चार वास्तविक मान .....,.....,..... तथा..... है। **[IIT-1996]**

Q.5 यदि फलन $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$; $f(x) = 2^{x(x-1)}$ द्वारा परिभाषित है, तो $f^{-1}(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

[IIT 99]

Q.6 माना [x] = महत्तम पूर्णांक ≤ x. यदि x के सभी मान इस प्रकार है कि गुणनफल $\left[x - \frac{1}{2}\right]\left[x + \frac{1}{2}\right]$ अभाज्य हैं तथा समुच्चय $[x_1, x_2) \cup [x_3, x_4)$, से सम्बन्धित हैं। समीकरण $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q.7 समिका $\left[\frac{3}{x}\right] + \left[\frac{4}{x}\right] = 5$ को संतुष्ट करने वाले 'x' के वास्तविक मानों का समुच्चय (जहाँ [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है) अन्तराल $\left(a, \frac{b}{c}\right]$ में है। जहाँ a, b, c ∈ N तथा $\frac{b}{c}$ अपने निम्नतम रूप में है तो a + b + c + abc का मान ज्ञात कीजिए।

Q.8 यदि f : R → R – {3} फलन है जिसमें T > 0 का अस्तित्व इस प्रकार है कि प्रत्येक x ∈ R के लिए $f(x + T) = \frac{f(x) - 5}{f(x) - 3}$ है। सिद्ध कीजिए कि f(x) आवर्ती है।

Q.9 फलन $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) - 2f\left(\left|\sqrt{2}\sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)\right|\right)$

$= 4\cos^2\frac{\pi x}{2} + x\cos\frac{\pi}{x}$ में सिद्ध कीजिए कि

(i) f(2) + f(1/2) = 1 (ii) f(2) + f(1) = 0

Q.10 $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 18}{x^2 + 4x + 30}$ के एकैकी होने की जांच कीजिए।

Q.11 फलन $f(x) = \frac{1}{[|x-1|] + [|7-x|] - 6}$ का प्रान्त ज्ञात कीजिए। जहाँ [•] महत्तम पूर्णांक फलन है।

Q.12 माना कि n धनात्मक पूर्णांक हैं एवं निम्न प्रकार परिभाषित है

f(n) = 1! + 2! + 3! + ... + n!,

जहाँ n! = n(n – 1)(n – 2) .... 3.2.1.

तो बहुपद P(x) एवं Q(x) ज्ञात कीजिए ताकि

f(n + 2) = P(n) f(n + 1) + Q(n) f(n), सभी n ≥ 1 के लिये सही हो।

Q.13 $y = \sqrt{-\log_{\frac{x+4}{2}}\left(\log_2\frac{2x-1}{3+x}\right)}$ का प्रान्त ज्ञात करो।

गद्यांश (Q. 14 & 15)

यदि संकेत [x]; x से बड़े या बराबर निम्नतम पूर्णांक को प्रदर्शित करता हैं तथा (.) ; x से छोटे या बराबर महत्तम पूर्णांक को प्रदर्शित करता है, तब

Q.14 समीकरण $(x)^2 + [x]^2 = [x - 1]^2 + (x + 1)^2$ का हल समुच्चय है -

(A) $\{x; x \in R\}$ (B) $\{x; x \in R - Z\}$

(C) $\{x; x \in Z\}$ (D) $\{x; x \in \phi\}$

Q.15 माना $f(x) = x + (x); x < 0$

$3x - 2(x); x \geq 0$

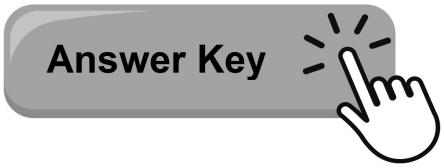
sgn f(x) का परिसर है -

(A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{-1, 1\}$

(C) $\{1, 0\}$ (D) $\{-1, 0\}$

Q.16 माना A, n विभिन्न अवयवों का समुच्चय है तब A से A में विभिन्न फलनों की संख्या ..... है तथा इनमें से..... आच्छादक फलन है। **[IIT-1985]**

Answer Key



EXERCISE (Level-1)

1. (A)	**2.** (D)	**3.** (C)	**4.** (D)	**5.** (A)	**6.** (C)	**7.** (B)
8. (C)	**9.** (C)	**10.** (B)	**11.** (C)	**12.** (A)	**13.** (D)	**14.** (C)
15. (A)	**16.** (D)	**17.** (B)	**18.** (D)	**19.** (B)	**20.** (A)	**21.** (B)
22. (C)	**23.** (B)	**24.** (C)	**25.** (A)	**26.** (A)	**27.** (A)	**28.** (B)
29. (B)	**30.** (B)	**31.** (A)	**32.** (D)	**33.** (B)	**34.** (D)	**35.** (A)
36. (A)	**37.** (A)	**38.** (D)	**39.** (C)	**40.** (A)	**41.** (A)	

EXERCISE (Level-2)

1. (C)	**2.** (B)	**3.** (B)	**4.** (B)	**5.** (C)	**6.** (B)	**7.** (D)
8. (D)	**9.** (C)	**10.** (A)	**11.** (C)	**12.** (D)	**13.** (B)	**14.** (B)
15. (D)	**16.** (C)	**17.** (D)	**18.** (C)	**19.** (B)	**20.** (B)	**21.** (D)
22. (A)	**23.** (D)	**24.** (B)	**25.** (A)	**26.** (D)	**27.** (A)	**28.** (A)
29. (A)	**30.** (B)					

EXERCISE (Level-3)

1. (D)	**2.** (A)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (C)	**6.** (B)	**7.** (C)
8. (A)	**9.** (D)	**10.** (C)	**11.** (C)	**12.** (B)	**13.** (B)	**14.** (C)
15. (D)	**16.** (D)	**17.** (C)	**18.** (C)	**19.** (B)	**20.** (B)	**21.** (B)
22. (C)	**23.** (D)	**24.** (C)	**25.** (C)	**26.** (B)	**27.** (A)	**28.** (D)
29. (Bonus)	**30.** (A)	**31.** (D)	**32.** (B)	**33.** (B)	**34.** (C)	**35.** (D)
36. (B)	**37.** (B)	**38.** (A)	**39.** (C)	**40.** (D)	**41.** (C)	**42.** (C)
43. (B)	**44.** (D)	**45.** (D)	**46.** (B)	**47.** 18.00	**48.** 1440	**49.** (C)
50. (D)	**51.** (A)	**52.** (B)	**53.** (B)	**54.** (B)	**55.** (B)	**56.** (A)
57. (D)	**58.** (B)	**59.** (B)	**60.** (A)	**61.** (B)	**62.** (A)	**63.** 392.00

EXERCISE (Level-4)

Part-A

1. (A,B,D)	**2.** (A,B,C,D)	**3.** (A,B)	**4.** (A,B,C)	**5.** (A,B,C,D)	**6.** (A,B)	**7.** (B,C,D)
8. (A,B,C,D)	**9.** (A,B)	**10.** (B,D)	**11.** (B,C)	**12.** (B,D)	**13.** (C)	**14.** (B,D)
15. (A,B,C,D)	**16.** (B,C,D)	**17.** (A,B,C,D)	**18.** (A,B,C)			

Part-B

19. (D)	**20.** (A)	**21.** (B)	**22.** (C)

Part-C

23. $A \to R$, $B \to P$, $C \to S$, $D \to Q$ **24.** $A \to Q$, $B \to S$, $C \to P$, $D \to R$

25. $A \to S$, $B \to S$, $C \to S$, $D \to R$ **26.** $A \to R$, $B \to Q,R$, $C \to Q$, $D \to S$

Part-D

27. (A) **28.** (C) **29.** (C) **30.** (A) **31.** (A,B,C,D) **32.** (C) **33.** (C)

34. (B) **35.** (C) **36.** (C) **37.** (D) **38.** (C)

Part-E

39. 1 **40.** 1 **41.** 2 **42.** 3 **43.** 3

Part-F

44. (i) $\left[-4, \frac{-3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 4\right]$ (ii) $\left(-4, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$

(iii) $(-\infty, -3]$ (iv) $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$

(v) $(3 - 2\pi < x < 3 - \pi) \cup (3 < x \le 4)$ (vi) $\left(0, \frac{1}{100}\right) \cup \left(\frac{1}{100}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

(vii) $(-1 < x < -1/2) \cup (x > 1)$ (viii) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$

(ix) $(-3, -1] \cup \{0\} \cup [1, 3)$ (x) $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \{x : x \in N, x \ge 2\}$

(xi) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 6\right)$ (xii) $[-3, -2) \cup [3, 4)$

(xiii) $R - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ (xiv) $2n\pi < x < (2n+1)\pi$ लेकिन $x \ne 1$ जहाँ n अऋणात्मक पूर्णांक है।

(xv) $x \in \{4, 5\}$

45. (i) $D : x \in R$ $R : [0, 2]$

(ii) $D = R$;परिसर $[-1, 1]$

(iii) $D : \{x \mid x \in R; x \ne -3 ; x \ne 2\}$ $R : \{f(x) \mid f(x) \in R, f(x) \ne 1/5 ; f(x) \ne 1\}$

(iv) $D : R$; $R : (-1, 1)$

(v) $D : -1 \le x \le 2$; $R : [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$

(vi) $D : x \in (2n\pi, (2n+1)\pi) - \{2n\pi + \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in I\}$ तथा परिसर $(-\infty, \infty) - \{0\}$

(vii) $D : [-4, \infty) - \{5\}$; $R : \left(0, \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ (viii) $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ (ix) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

46. (b) (i), (iii) समरूप **48.** $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ **49.** $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ **50.** $[0, 4)$

51. $\begin{cases} -x\ ;\ -2 \le x < 0 \\ 0\ ;\ 0 \le x < 1 \\ 2(x-1)\ ;\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ **52.** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

53. $A = \left\{0, \log_3 7, \frac{129}{64}, \frac{33}{16}, \frac{9}{4}, 3, 5, 6\right\}$ तथा चूंकि f(x) एकैकी आच्छादक नहीं है इसलिए $f^{-1} : B \to A$ संभव नहीं है।

57. $f_o(x)\begin{cases}-x\tan x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ -\frac{\pi}{2}[-x], & -2\le x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$; $f_e(x)=\begin{cases}x\tan x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ \frac{\pi}{2}[-x], & -2\le x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

58. $\text{fog}(x)=\begin{cases}-(1+x), & 1\le x\le 0\\ x-1, & 0<x\le 2\end{cases}$; $\text{gof}(x)=\begin{cases}x+1 & ,\ 0\le x<1\\ 3-x & ,\ 1\le x\le 2\\ x-1 & ,\ 2<x\le 3\\ 5-x & ,\ 3<x<4\end{cases}$; $\text{fof}(x)=\begin{cases}x & ,\ 0\le x\le 1\\ 4-x & ,\ 3\le x<4\end{cases}$;

$$\text{gog}(x)=\begin{cases}-x & ,\ -1\le x\le 0\\ x & ,\ 0<x\le 2\\ 4-x & ,\ 2<x\le 3\end{cases}$$

59. प्रान्त : [1, 2]; परिसर : [ℓn 2, ℓn 4)

60. (i) न सम और न ही विषम (ii) सम (iii) सम (iv) सम (v) विषम

61. (i) π (ii) 2 (iii) $\frac{2\pi}{3}$ (iv) 2π (v) $2^n\pi$ (vi) π **62.** $f(x)=2x^2$ **63.** 6016

EXERCISE (Level-5)

1. (A) **2.** (C) **3.** $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{10}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{2}\right]$ **4.** A → P,R,S; B → Q,S; C → Q,S; D → P,R,S

5. (A) **6.** (B) **7.** (This question was awarded as bonus) **8.** (A,B,C) **9.** (A,B,C)

10. 119.00 **11.** (A) **12.** (C) **13.** 1.00 **14.** 19.00 **15.** (A, B) **16.** (B,C,D)

17. (C) **18.** 8 **19.** (C) **20.** (A, B) **21.**(C) **22.**(D) **23.** [51.00]

24. [5.00] **25.** (C) **26.** (A,D) **27.** 96.00

EXERCISE (Level-6)

1. a = 3 **2.** $\alpha\in\phi$ **3.** $\{x\in R \mid x\notin[-1, 0)\}$ **4.** $\frac{\pm 3\pm\sqrt{5}}{2}$ **5.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\log_2 x}\right)$

6. 11 **7.** 20 **10.** No **11.** $R-(0, 1)\cup\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\cup(7, 8)$

12. P(x) = x + 3, Q(x) = –(x + 2) **13.** $(-4, -3)\cup(4, \infty)$ **14.** (B) **15.**(A) **16.** n^n, n!